

## d'Alembertův princip

Autorem tohoto principu je Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783), který tento princip publikoval v roce 1742.

**SYSTEM  $N$  HMOTNÝCH BODŮ SE VYVÍJÍ TAKOVÝM ZPŮSOBEM, ŽE PLATÍ:**

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = 0, \quad (9)$$

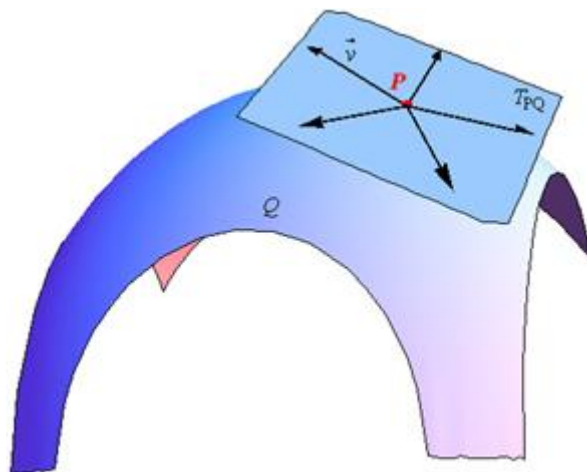
**KDE  $\delta x^i$  JSOU SLOŽKY TZV. VIRTUÁLNÍHO POSUNUTÍ.**

Rovnicí (9) tak vlastně d'Alembert přeformuloval Newtonovu [mechaniku](#) pomocí nového přístupu. Základní představa byla taková, že virtuální posunutí jsou nekonečně malá posunutí, která jsou v souladu s [vazbami](#)  $\varphi_k(x^i, t) = 0$ . Složka  $\delta x^i$  virtuálního posunutí tak vlastně odpovídá změně polohy hmotného bodu, tj. odpovídá změně souřadnice  $x^i$ .

Pokud tedy rovnice (9) platí pro všechna  $\delta x^i$ , odpovídají složky [sil](#)  $F_i$  složkám [zrychlení](#)  $\ddot{x}_i$  a [pohyb](#) hmotného bodu lze uskutečnit. Na základě  $\ddot{x}_i$  můžeme určit polohu hmotného bodu v čase a můžeme tak konstruovat jeho [trajektorii](#) implicitním způsobem.

Rovnice (9) je tedy splněna tehdy, pokud složky sil  $F_i$  a složky zrychlení  $\ddot{x}_i$  jsou vzájemně dobře nastaveny.

Virtuální posunutí se složkami  $\delta x^i$  je pojem, který zavedl d'Alembert a jeho kolegové. Z hlediska současné interpretace lze na virtuální posunutí nahlížet jako na tečný vektor  $\vec{v}$ , který je sestrojen v daném bodě  $P$  plochy k této ploše, po níž se hmotný bod pohybuje. Jedná se o tzv. [konfigurační prostor](#)  $Q$ , který je popsán rovnicí  $\varphi = 0$ . Všechny uvažované tečné vektory pak leží v tečné rovině  $T_{PQ}$  sestrojené v bodě  $P$  (viz obr. 12). Proto platí  $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3, \dots, v^{3N}) = (\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N})$ .



Obr. 12

Každý bod konfiguračního prostoru  $Q$  má svůj tečný prostor - tečnou rovinu  $T_{PQ}$ .

Konfigurační prostor tedy je plochou vazby popsané rovnicí  $\varphi = 0$ . V něm leží ty body, v nichž se může pohybuující se hmotný bod nacházet.

V rovnici (9) tedy testujeme [výchylku](#) hmotného bodu z bodu, v němž se právě nachází, do všech tečných směrů popsanych tečnými vektory  $\vec{v}$  ležícími v  $T_{PQ}$ .

**D'ALEMBERTŮV PRINCIP JE EKVIVALENTNÍ LAGRANGEOVÝM ROVNICÍM I. DRUHU (VIZ ROVNICE (7) A (8)) A TEDY JE EKVIVALENTNÍ I NEWTONOVÝM ROVNICÍM S (HOLONOMNÍMI) VAZBAMI.**

Toto tvrzení lze dokázat.

Nejdříve dokážeme implikaci, že z Lagrangeových rovnic I. druhu (tj. ze vztahů (7) a (8)) vyplývá d'Alembertův princip (vztah (9)).

Rovnici  $m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}$  upravíme na tvar  $m_i \ddot{x}_i - F_i = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}$  a vynásobíme složkou

virtuálního posunutí  $\delta x^i$  a sečteme:  $\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} \delta x^i$ . Nyní zaměníme pořadí sčítání

na pravé straně rovnice  $\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} \delta x^i$ . Pokud uvědomíme, že  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}$  je složka

gradientu  $\varphi$  a  $\delta x^i$  je složka tečného vektoru, můžeme psát  $\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k \text{grad} \varphi_k \cdot \vec{v}$ . Gradient

plochy  $\varphi$  má ovšem směr normály k této ploše (viz vztah (4)) a je tedy kolmý k tečně (resp. k tečné rovině) v daném bodě. Je tedy kolmý i k tečnému vektoru  $\vec{v}$  a jejich skalární součin je nulový. Proto

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = 0.$$

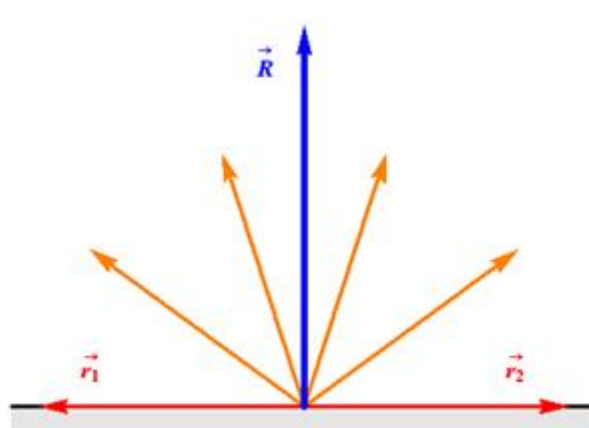
Důkaz obrácené implikace, tj. že ze vztahu (9) vyplývají vztahy (7) a (8) provedeme úvahou. Uvážíme dva případy:

1. neexistuje vazba - to znamená, že složky virtuálního posunutí  $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$  jsou navzájem nezávislé a tedy  $m_i \ddot{x}_i - F_i = 0$  pro všechna  $i$  od 1 do  $3N$ ;
2. existují vazby - to znamená, že složky virtuálního posunutí  $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$  obecně nejsou navzájem nezávislé. Metodou Lagrangeových multiplikátorů lze dokázat, že musí existovat systém  $3N + \nu$  rovnic, které splňují podmínky (7) a (8).

Fakt, že složky  $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$  nejsou obecně nezávislé si lze představit následující úvahou: když jdeme ze schodů, jdeme dopředu, ale zároveň jdeme dolů. Tj. díky existenci vazby (schody) nemůže naše rychlost mířit libovolným směrem. Složky  $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$  jsou složkami tečných vektorů. A vektor rychlosti je k dané ploše vždy tečný.

Metoda Lagrangeových multiplikátorů se používá v matematické analýze při hledání vázaných extrémů funkcí více proměnných.

Rovnice (9) platí jen pro vratná virtuální posunutí  $\delta x^i$ , tj. taková posunutí, že k posunutí  $\delta x^i$  existuje také posunutí  $-\delta x^i$ . V případě oboustranných vazeb jsou všechna posunutí vratná. V případě jednostranných vazeb by vratná posunutí byla jen dvě - viz obr. 13, na kterém jsou zakreslena vratná posunutí  $\vec{r}_1$  a  $\vec{r}_2$ . (Obrázek je schématický a platí i pro zakřivené vazbové plochy nikoliv jen pro rovinu.)



Obr. 13

Pokud bychom v případě jednostranných vazeb uvažovali i nevratná virtuální posunutí, změnil by se tvar d'Alembertova principu (9) na tvar

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i \leq 0. \quad (10)$$

Na základě vztahu (9) lze najít i dva speciální případy d'Alembertova principu:

1. není žádná vazba - to znamená, že složky virtuálního posunutí  $\delta x^1, \delta x^2, \delta x^3, \dots, \delta x^{3N}$  jsou libovolné a na sobě navzájem nezávislé. Vztah (9) pak lze psát ve tvaru

$$m_i \ddot{x}_i - F = 0 \quad (11)$$

pro všechna  $i = 1, 2, \dots, 3N$ . Získáme tak  $3N$  na sobě nezávislých Newtonových rovnic.

2. není žádný pohyb - to znamená, že  $\dot{x}_i = 0$  pro všechna  $i = 1, 2, \dots, 3N$  a tedy platí

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x^i = 0. \quad (12)$$

Občas je vhodné takovou situaci (tj. silové působení bez pohybu) studovat: stabilita mostů, statické konstrukce (např. [vysílačů](#), stožárů vysokého napětí, ...) a podobně.

**VZTAH (12) DEFINUJE PRINCIP VIRTUÁLNÍ PRÁCE, KTERÁ BY SE VYKONALA, KDYBY SE HMOTNÝ BOD VYCHÝLIL ZE SVÉHO ROVNOVÁŽNÉHO STAVU.**

Tento poznatek odvodil Johann [Bernoulli](#) (1667 - 1748) v roce 1717, ale základy principu virtuální práce byly známy již od starověku.

Na základě vztahu (12) lze právě rovnovážný stav poznat: vztah (12) totiž v rovnovážném stavu musí platit pro všechna virtuální posunutí.

Je-li těleso v rovnovážném stavu (viz obr. 14), tak ať ho vychýlíme jakýmkoliv směrem, který [vazby systému](#) umožňují, tak se vždy vrátí do rovnovážného stavu. V případě nerovnovážného stavu (viz obr. 15) to neplatí.

V případě určitého typu sil se situace zjednoduší. Tyto síly se nazývají [konzervativní síly](#).

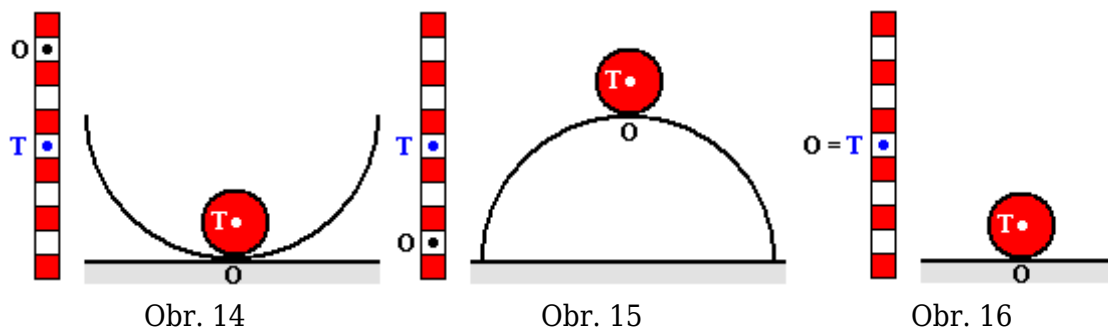
Pro konzervativní síly platí

$$\delta V = 0. \quad (13)$$

To ovšem znamená, že [potenciální energie](#) může mít extrém - existují tedy tři možnosti:

1. [potenciální energie](#) nabývá minima - jedná se o stabilní [rovnovážnou polohu](#) (viz obr. 14);
2. [potenciální energie](#) nabývá maxima - jedná se o [labilní](#) rovnovážnou polohu (viz obr. 15);
3. [potenciální energie](#) nemá extrém - jedná se o [indiferentní](#) rovnovážnou polohu (viz obr. 16).

Podmínka (13) udává podmínku [rovnováhy](#), ale není možné usoudit o jaký z právě uvedených tří možných případů se jedná.



Symbol  $\delta V$  se používá z historických důvodů a lze místo něj psát totální diferenciál  $dV$ .

Příklad: Rovnováha tyčky mezi stěnou a hranou

Homogenní tyč délky  $2l$  je umístěna mezi stěnou a hranou, které jsou ve vzájemné vzdálenosti  $a$ . Při jaké poloze bude tyč v rovnovážné poloze?

Řešení: K řešení využijeme d'Alembertův princip v jeho speciální podobě podle vztahu (12). Hledáme rovnovážnou polohu, tj. stav systému (tyče) bez rotace a posunutí - budeme tedy uvažovat pouze jedinou sílu, která na tyč působí: gravitační sílu  $\vec{F}_g$  (viz obr. 17). Na základě této

úvahy a vztahu (12) lze psát  $\sum_{i=1}^3 F_i \delta x^i = 0$ , tj.  $F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = 0$  a po dosazení:  $0 - mg \delta y + 0 = 0$ .

Odtud získáme  $\delta y = 0$ . To znamená, že rovnovážná poloha nastává tehdy, pokud se y-ová souřadnice polohy těžiště nemění.

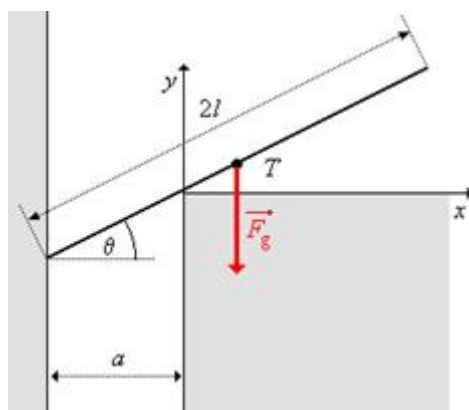
Představíme-li si pohyb tyče v souladu s danými vazbami, tak se její těžiště bude pohybovat po části kružnice. V místě, kde nastává rovnováha, se y-ová souřadnice jeho polohy skutečně nemění.

Polohu tyče je dobré popsat pomocí úhlu  $\vartheta$ , který svírá tyč s kladnou částí osy  $x$ . Pak lze pro y-ovou souřadnici těžiště, která je závislá na úhlu  $\vartheta$ , psát:  $y = l \sin \vartheta - a \operatorname{tg} \vartheta$ . Proto

$\delta y = \frac{dy}{d\vartheta} \delta \vartheta = \left( l \cos \vartheta - \frac{a}{\cos^2 \vartheta} \right) \delta \vartheta$ . Vzhledem k tomu, že má platit  $\delta y = 0$  pro všechna  $\delta \vartheta$ , musí být

$l \cos \vartheta - \frac{a}{\cos^2 \vartheta} = 0$ . Odtud získáme, že  $\cos \vartheta = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$ .

Tyč je v rovnovážné poloze, svírá-li s vodorovným směrem úhel  $\vartheta$ , který je dán vztahem  $\cos \vartheta = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$ .



Obr. 17

Licence <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> zakazuje úpravy a komerční distribuci.