

## Zobecněné rychlosti

[Konfigurační prostor](#) ([konfigurační](#) varieta)  $Q$  popsáný [zobecněnými souřadnicemi](#) (17) není prostorem fyzikálních stavů daného systému.

Konfigurační prostor nepopisuje stavy systému, protože není možné počítat [rychlosti](#), [hybnosti](#), [zrychlení](#), ... [hmotných bodů](#). Proto je nutné něco doplnit.

Aby konfigurační prostor popisoval stavy systému, je nutné doplnit tzv. zobecněné rychlosti

$$\{\dot{q}^j\} = \{\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3, \dots, \dot{q}^n\} \quad (19)$$

pro  $j = 1, 2, \dots, n$ .

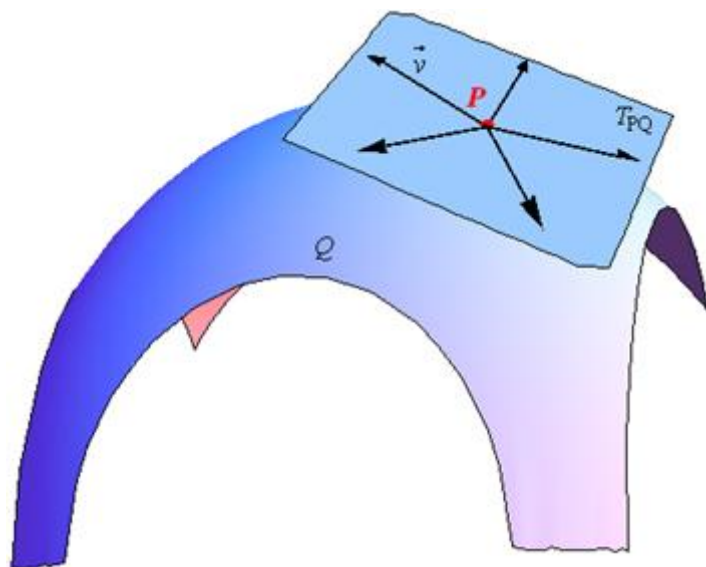
Jedná se o dodatečné (rychlostní) parametry, které jsou zcela nezávislé na poloze popsané zobecněnými souřadnicemi (17). Značení  $\dot{q}^j$  neznámá časovou derivaci zobecněné souřadnice - jedná se o historické označení zobecněných rychlostí, které se zobecněnými souřadnicemi nemají žádnou souvislost. Zobecněné souřadnice  $q^j$  a zobecněné rychlosti  $\dot{q}^j$  jsou tedy navzájem nezávislé. Libovolný bod tedy může mít libovolnou rychlost. Je proto důležité odlišovat označení zobecněných rychlostí od časové derivace zobecněné souřadnice.

Formálně je nutné odlišit následující zápisy:

1.  $\frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j^i$ , kde  $\delta_j^i$  je tzv. Kroneckerovo delta;
2.  $\frac{\partial q^i}{\partial \dot{q}^j} = 0$ ;
3.  $\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{q}^j} = \delta_j^i$
4.  $\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} = 0$

Pro libovolný bod  $P$  v konfiguračním prostoru jsou dány zobecněné souřadnice (17), které jednoznačně popisují jeho polohu. Prostor rychlostí v daném bodě je tečná rovina (tečný prostor)  $T_{PQ}$  sestavený v tomto bodě ke konfiguračnímu prostoru  $Q$ . Pro popis systému jsou tedy nutné dva prostory (viz obr. 23):

1. prostor poloh - je popsán zobecněnými souřadnicemi (17) a popisuje polohu hmotného bodu  $P$  v konfiguračním prostoru  $Q$ ;
2. prostor rychlostí - popisuje rychlost hmotného bodu v daném bodě  $P$ . Vektor rychlosti  $\vec{v}$  leží v tečném prostoru  $T_{PQ}$  a složky tohoto vektoru v určité zvolené [bázi](#) jsou zobecněné rychlosti (19).

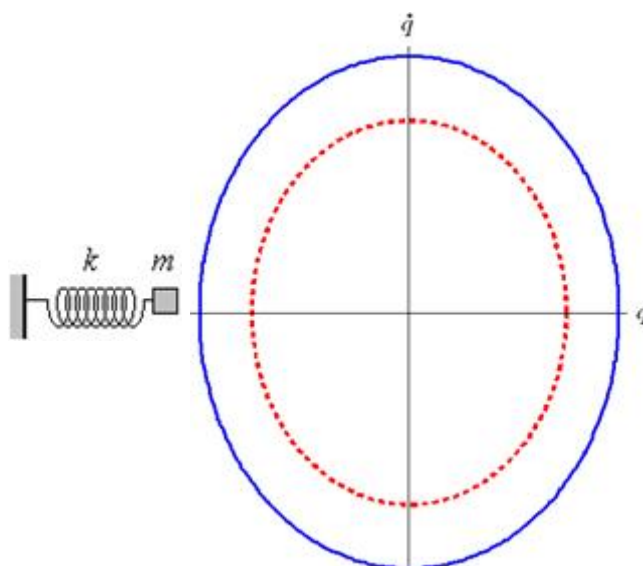


Obr. 23

Lze tedy zavést prostor dimenze  $2n$ , v němž jsou definovány jak zobecněné souřadnice (17), tak zobecněné rychlosti (19). Tento prostor už popisuje všechny možné stavy hmotných bodů, neboť kromě konfigurací popsaných zobecněnými souřadnicemi, obsahuje i prostor rychlostí. Tomuto prostoru se říká **fázový prostor**.

Jiné označení tohoto prostoru je také tečný bandl.

V prostoru  $T_{PQ}$  jsou tedy definovány všechny možné rychlosti daného hmotného bodu (resp. soustavy hmotných bodů) ve všech bodech  $Q$ .



Obr. 24

Obr. 25

**Příklad:** Fázový portrét [harmonického oscilátoru](#)

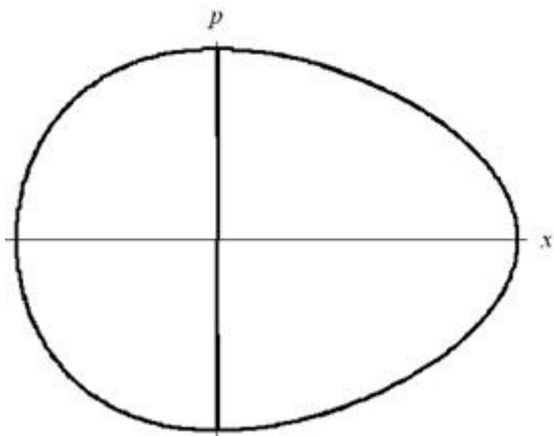
Zakreslete vývoj harmonického oscilátoru v tzv. fázovém prostoru, tj. sestrojte graf v diagramu, na jehož vodorovnou osu se nanáší zobecněná souřadnice a na svislou zobecněná rychlost.

Řešení: Harmonický oscilátor může být realizován např. [pružinou](#), na které je zavěšen hmotný bod o hmotnosti  $m$  (viz obr. 24). Zobecněná souřadnice popisuje [výchytku oscilátoru](#) v závislosti na čase:

$q(t) = A \cos \omega t$ . Rychlost oscilátoru je dána vztahem  $\dot{q}(t) = -A\omega \sin \omega t$ . Nyní sestrojíme požadovaný graf - v diagramu na obr. 25 jsou znázorněny dva grafy, které se liší **amplitudou výchylky** harmonického oscilátoru. Libovolný bod, který leží na vybrané křivce má **souřadnice**  $[q(t); \dot{q}(t)]$ , tj. poloha hmotného bodu zavěšeného na pružině v libovolném čase je dána skutečně souřadnicí polohy a rychlosti. Svislá osa fázového prostoru je pojmenována  $\dot{q}$  a je to zobecněná rychlost. Oscilátor, který je v **klidu**, je ve fázovém prostoru popsán bodem  $[0; 0]$ , v němž se nachází v každém časovém okamžiku.

Každým bodem fázového prostoru prochází právě jedna křivka, pomocí níž lze rekonstruovat **trajektorii** hmotného bodu. Každý bod fázového prostoru totiž určuje polohu a rychlost daného hmotného bodu (resp. systému hmotných bodů) v konkrétním čase. Analýzou všech bodů lze sestavit trajektorii, po níž se hmotný bod pohyboval (resp. po níž se bude pohybovat, zůstane-li jeho rychlost stálá). Souřadnice  $[q(t); \dot{q}(t)]$  každého bodu fázového prostoru tedy tvoří výchozí parametry pro řešení příslušných diferenciálních rovnic.

Trajektorie hmotného bodu ve fázovém prostoru je vždy uzavřená (viz obr. 26). Za uzavřenou se považuje i trajektorie **částice**, která přilétne z nekonečna a zase se vrátí zpět (viz obr. 27).



Obr. 26



Obr. 27