

Zobecněné rychlosti

[Konfigurační prostor](#) ([konfigurační](#) varieta) Q popsáný [zobecněnými souřadnicemi](#) (17) není prostorem fyzikálních stavů daného systému.

Konfigurační prostor nepopisuje stavy systému, protože není možné počítat [rychlosti](#), [hybnosti](#), [zrychlení](#), ... [hmotných bodů](#). Proto je nutné něco doplnit.

Aby konfigurační prostor popisoval stavy systému, je nutné doplnit tzv. zobecněné rychlosti

$$\{\dot{q}^j\} = \{\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3, \dots, \dot{q}^n\} \quad (19)$$

pro $j = 1, 2, \dots, n$.

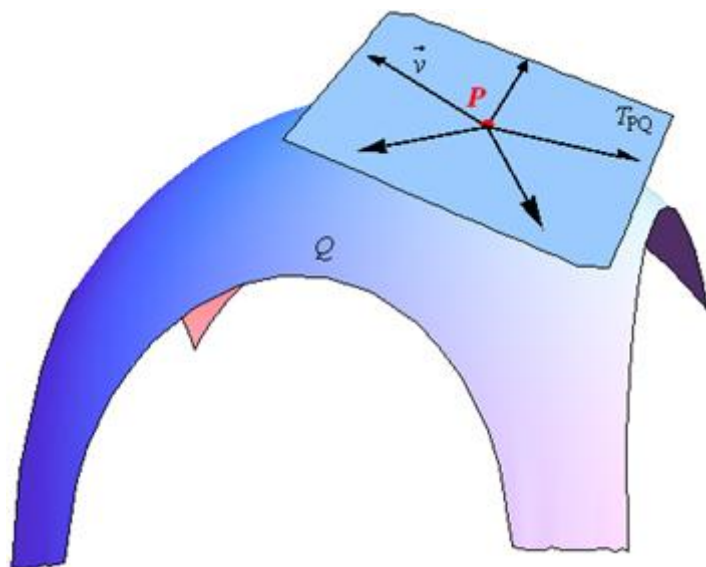
Jedná se o dodatečné (rychlostní) parametry, které jsou zcela nezávislé na poloze popsané zobecněnými souřadnicemi (17). Značení \dot{q}^j neznámá časovou derivaci zobecněné souřadnice - jedná se o historické označení zobecněných rychlostí, které se zobecněnými souřadnicemi nemají žádnou souvislost. Zobecněné souřadnice q^j a zobecněné rychlosti \dot{q}^j jsou tedy navzájem nezávislé. Libovolný bod tedy může mít libovolnou rychlost. Je proto důležité odlišovat označení zobecněných rychlostí od časové derivace zobecněné souřadnice.

Formálně je nutné odlišit následující zápisy:

1. $\frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j^i$, kde δ_j^i je tzv. Kroneckerovo delta;
2. $\frac{\partial q^i}{\partial \dot{q}^j} = 0$;
3. $\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{q}^j} = \delta_j^i$
4. $\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} = 0$

Pro libovolný bod P v konfiguračním prostoru jsou dány zobecněné souřadnice (17), které jednoznačně popisují jeho polohu. Prostor rychlostí v daném bodě je tečná rovina (tečný prostor) T_{PQ} sestavený v tomto bodě ke konfiguračnímu prostoru Q . Pro popis systému jsou tedy nutné dva prostory (viz obr. 23):

1. prostor poloh - je popsán zobecněnými souřadnicemi (17) a popisuje polohu hmotného bodu P v konfiguračním prostoru Q ;
2. prostor rychlostí - popisuje rychlost hmotného bodu v daném bodě P . Vektor rychlosti \vec{v} leží v tečném prostoru T_{PQ} a složky tohoto vektoru v určité zvolené [bázi](#) jsou zobecněné rychlosti (19).

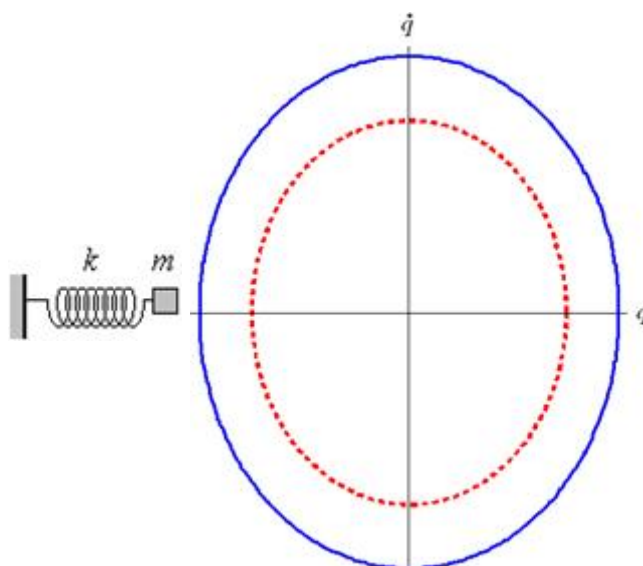


Obr. 23

Lze tedy zavést prostor dimenze $2n$, v němž jsou definovány jak zobecněné souřadnice (17), tak zobecněné rychlosti (19). Tento prostor už popisuje všechny možné stavy hmotných bodů, neboť kromě konfigurací popsaných zobecněnými souřadnicemi, obsahuje i prostor rychlostí. Tomuto prostoru se říká **fázový prostor**.

Jiné označení tohoto prostoru je také tečný bandl.

V prostoru T_{PQ} jsou tedy definovány všechny možné rychlosti daného hmotného bodu (resp. soustavy hmotných bodů) ve všech bodech Q .



Obr. 24

Obr. 25

Příklad: Fázový portrét [harmonického oscilátoru](#)

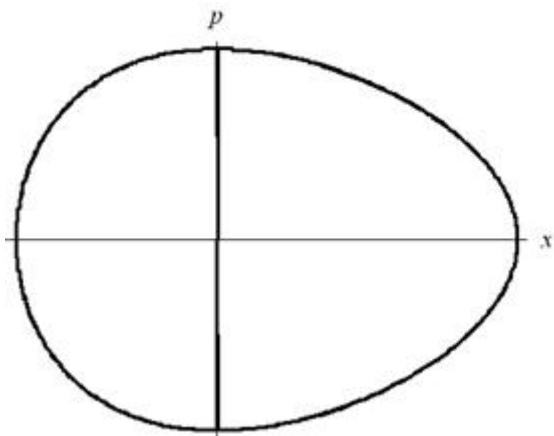
Zakreslete vývoj harmonického oscilátoru v tzv. fázovém prostoru, tj. sestrojte graf v diagramu, na jehož vodorovnou osu se nanáší zobecněná souřadnice a na svislou zobecněná rychlost.

Řešení: Harmonický oscilátor může být realizován např. [pružinou](#), na které je zavěšen hmotný bod o hmotnosti m (viz obr. 24). Zobecněná souřadnice popisuje [výchylku oscilátoru](#) v závislosti na čase:

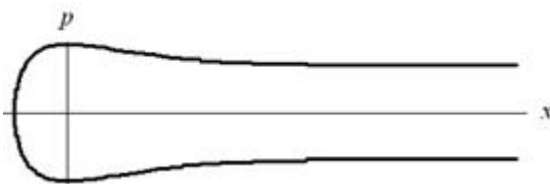
$q(t) = A \cos \omega t$. Rychlost oscilátoru je dána vztahem $\dot{q}(t) = -A\omega \sin \omega t$. Nyní sestrojíme požadovaný graf - v diagramu na obr. 25 jsou znázorněny dva grafy, které se liší **amplitudou výchylky** harmonického oscilátoru. Libovolný bod, který leží na vybrané křivce má **souřadnice** $[q(t); \dot{q}(t)]$, tj. poloha hmotného bodu zavěšeného na pružině v libovolném čase je dána skutečně souřadnicí polohy a rychlosti. Svislá osa fázového prostoru je pojmenována q a je to zobecněná rychlost. Oscilátor, který je v **klidu**, je ve fázovém prostoru popsán bodem $[0; 0]$, v němž se nachází v každém časovém okamžiku.

Každým bodem fázového prostoru prochází právě jedna křivka, pomocí níž lze rekonstruovat **trajektorii** hmotného bodu. Každý bod fázového prostoru totiž určuje polohu a rychlost daného hmotného bodu (resp. systému hmotných bodů) v konkrétním čase. Analýzou všech bodů lze sestavit trajektorii, po níž se hmotný bod pohyboval (resp. po níž se bude pohybovat, zůstane-li jeho rychlost stálá). Souřadnice $[q(t); \dot{q}(t)]$ každého bodu fázového prostoru tedy tvoří výchozí parametry pro řešení příslušných diferenciálních rovnic.

Trajektorie hmotného bodu ve fázovém prostoru je vždy uzavřená (viz obr. 26). Za uzavřenou se považuje i trajektorie **částice**, která přilétne z nekonečna a zase se vrátí zpět (viz obr. 27).



Obr. 26



Obr. 27