Zobecněné rychlosti

Konfigurační prostor (konfigurační varieta) *Q* popsaný zobecněnými souřadnicemi (17) není prostorem fyzikálních stavů daného systému.

Konfigurační prostor nepopisuje stavy systému, protože není možné počítat rychlosti, hybnosti, zrychlení, … hmotných bodů. Proto je nutné něco doplnit.

Aby konfigurační prostor popisoval stavy systému, je nutné doplnit tzv. zobecněné rychlosti

$$\left\{\dot{q}^{j}\right\} = \left(\dot{q}^{1}, \dot{q}^{2}, \dot{q}^{3}, \ldots, \dot{q}^{n}\right) \tag{19}$$

pro $j = 1, 2, \ldots, n$.

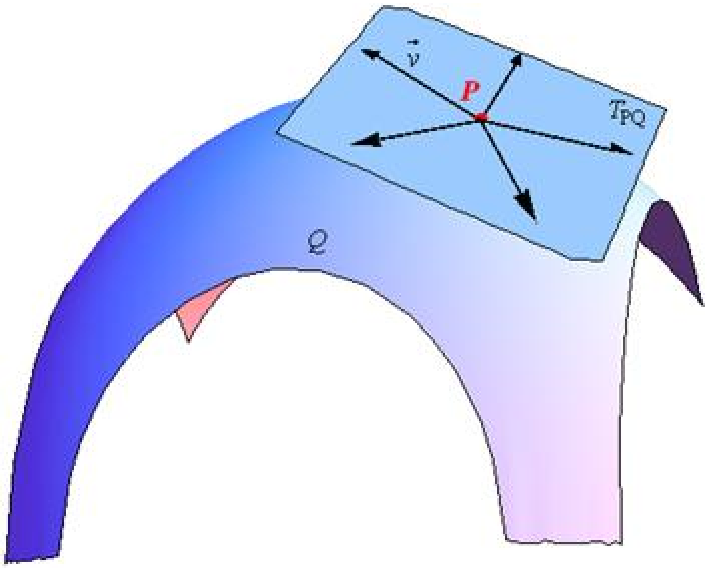
Jedná se o dodatečné (rychlostní) parametry, které jsou zcela nezávislé na poloze popsané zobecněnými souřadnicemi (17). Značení $\dot{q}^{j}$ neznamená časovou derivaci zobecněné souřadnice - jedná se o historické označení zobecněných rychlostí, které se zobecněnými souřadnicemi nemají žádnou souvislost. Zobecněné souřadnice q^{j} a zobecněné rychlosti $\dot{q}^{j}$ jsou tedy navzájem nezávislé. Libovolný bod tedy může mít libovolnou rychlost. Je proto důležité odlišovat označení zobecněných rychlostí od časové derivace zobecněné souřadnice.

Formálně je nutné odlišit následující zápisy:

1. $\dfrac{\partial q^{i}}{\partial q^{j}} = \delta^{i}_{j}$, kde δ^{i}_{j} je tzv. Kroneckerovo delta;
2. $\dfrac{\partial q^{i}}{\partial \dot{q}^{j}} = 0$;
3. $\dfrac{\partial \dot{q}^{i}}{\partial \dot{q}^{j}} = \delta^{i}_{j}$
4. $\dfrac{\partial \dot{q}^{i}}{\partial q^{j}} = 0$

Pro libovolný bod *P* v konfiguračním prostoru jsou dány zobecněné souřadnice (17), které jednoznačně popisují jeho polohu. Prostor rychlostí v daném bodě je tečná rovina (tečný prostor) T_{PQ} sestrojený v tomto bodě ke konfiguračnímu prostoru *Q*. Pro popis systému jsou tedy nutné dva prostory (viz obr. 23):

1. prostor poloh - je popsán zobecněnými souřadnicemi (17) a popisuje polohu hmotného bodu *P* v konfiguračním prostoru *Q*;
2. prostor rychlostí - popisuje rychlost hmotného bodu v daném bodě *P*. Vektor rychlosti $\vec{v}$ leží v tečném prostoru T_{PQ} a složky tohoto vektoru v určité zvolené bázi jsou zobecněné rychlosti (19).

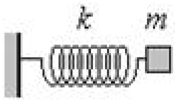


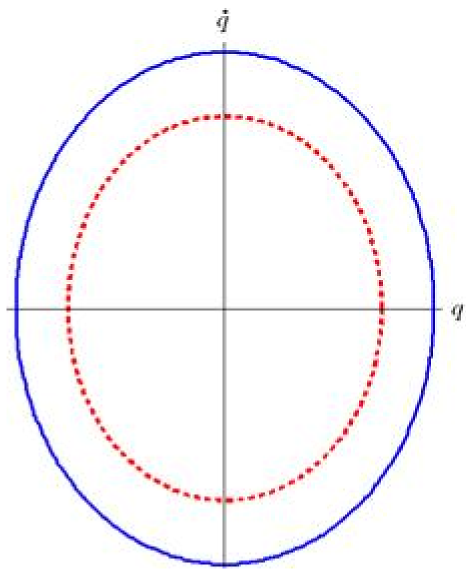
Obr. 23

Lze tedy zavést prostor dimenze 2*n*, v němž jsou definovány jak zobecněné souřadnice (17), tak zobecněné rychlosti (19). Tento prostor už popisuje všechny možné stavy hmotných bodů, neboť kromě konfigurací popsaných zobecněnými souřadnicemi, obsahuje i prostor rychlostí. Tomuto prostoru se říká **fázový prostor**.

Jiné označení tohoto prostoru je také tečný bandl.

V prostoru T_{PQ} jsou tedy definovány všechny možné rychlosti daného hmotného bodu (resp. soustavy hmotných bodů) ve všech bodech *Q*.





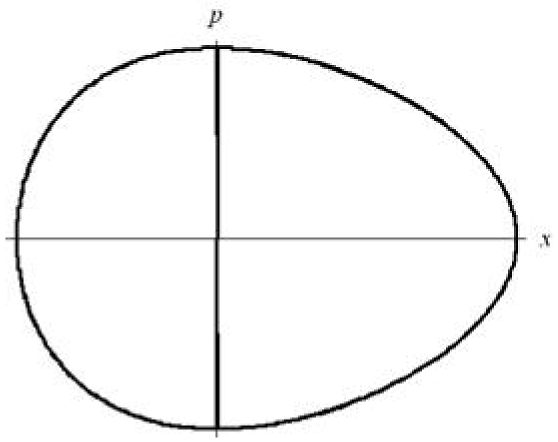
Obr. 24 Obr. 25

Příklad: Fázový portrét harmonického oscilátoru
Zakreslete vývoj harmonického oscilátoru v tzv. fázovém prostoru, tj. sestrojte graf v diagramu, na jehož vodorovnou osu se nanáší zobecněná souřadnice a na svislou zobecněná rychlost.
Řešení: Harmonický oscilátor může být realizován např. pružinou, na které je zavěšen hmotný bod o hmotnosti *m* (viz obr. 24). Zobecněná souřadnice popisuje výchylku oscilátoru v závislosti na čase:

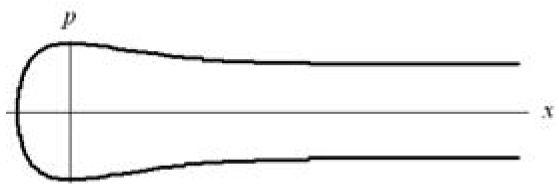
$q(t) = A\cos\omega t$. Rychlost oscilátoru je dána vztahem $\dot{q}(t) = -A\omega\sin\omega t$. Nyní sestrojíme požadovaný graf - v diagramu na obr. 25 jsou znázorněny dva grafy, které se liší amplitudou výchylky harmonického oscilátoru. Libovolný bod, který leží na vybrané křivce má souřadnice $[q(t); \dot{q}(t)]$, tj. poloha hmotného bodu zavěšeného na pružině v libovolném čase je dána skutečně souřadnicí polohy a rychlosti. Svislá osa fázového prostoru je pojmenována $\dot{q}$ a je to zobecněná rychlost.
Oscilátor, který je v klidu, je ve fázovém prostoru popsán bodem $[0; 0]$, v němž se nachází v každém časovém okamžiku.

Každým bodem fázového prostoru prochází právě jedna křivka, pomocí níž lze rekonstruovat trajektorii hmotného bodu. Každý bod fázového prostoru totiž určuje polohu a rychlost daného hmotného bodu (resp. systému hmotných bodů) v konkrétním čase. Analýzou všech bodů lze sestrojit trajektorii, po níž se hmotný bod pohyboval (resp. po níž se bude pohybovat, zůstane-li jeho rychlost stálá). Souřadnice $[q(t); \dot{q}(t)]$ každého bodu fázového prostoru tedy tvoří výchozí parametry pro řešení příslušných diferenciálních rovnic.

Trajektorie hmotného bodu ve fázovém prostoru je vždy uzavřená (viz obr. 26). Za uzavřenou se považuje i trajektorie částice, která přilétne z nekonečna a zase se vrátí zpět (viz obr. 27).



Obr. 26



Obr. 27