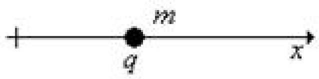
Pohyb jedné částice po úsečce

Při odvozování pohybového zákona, který využívá zobecněné souřadnice v konfiguračním prostoru, začneme nejjednodušším případem: pohybem jedné částice (jednoho hmotného bodu) o hmotnosti *m* po úsečce (viz obr. 29). Tento systém bude obecně popsán holonomními reonomními vazbami.



Obr. 29

Trajektorii hmotného bodu tedy popíšeme obecně funkcí

$$x(t) = x\big(q(t), t\big)\,. \tag{20}$$

Místo vektorů, které používala při popisu pohybu hmotného bodu Newtonova mechanika, použijeme skalární fyzikální veličiny. Jednou z vhodných skalárních veličin je kinetická energie hmotného bodu, která je definována vztahem

$$T = \frac{1}{2} m v^2\,. \tag{21}$$

Vztah (21) lze přepsat ve tvaru $T = \frac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$. Uvědomíme-li si, že souřadnice popisující polohu hmotného bodu závisí na čase podle vztahu (20), můžeme kinetickou energii psát ve tvaru

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 \tag{22}$$

a pro další výpočty je důležité si uvědomit, že kinetická energie je závislá na čase. Nyní ovšem vyšetříme chování této funkce v určitém vybraném čase t_0. Tento čas je ale vybrán libovolně, takže následující úvaha platí pro libovolný čas *t*. Přepíšeme vztah (22) přesněji:

$$T(q, \dot{q}, t_0) = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial x}{\partial q}\big(q(t_0), t_0\big)\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}\big(q(t_0), t_0\big)\right)^2, \tag{23}$$

kde $q = q(t_0)$ je okamžitá poloha hmotného bodu a $\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t_0)$ je okamžitá rychlost, kterou se hmotný bod v čase t_0 pohybuje. Vztahem (23) jsme přešli od $\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t_0)$ k $\dot{q}$, tj. od časové derivace zobecněné souřadnice k zobecněné rychlosti. Od této chvíle jsou tedy *q* a $\dot{q}$ nezávislé parametry.

Právě provedenou úvahu se „zastavením času" si lze představit tak, že z pohybu, který natočíme na film, nás bude zajímat jen jedno políčko vyvolaného filmu. A bude to právě to políčko, které bylo zaznamenáno v čase t_0.

Nyní určíme výrazy $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ a $\frac{\partial T}{\partial q}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2} m.2 \left(\frac{\partial x}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial q} = m\left(\frac{\partial x}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial q} \tag{24}$$

a

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{1}{2}m.2\left(\frac{\partial x}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}\right).\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}\right) = m\left(\frac{\partial x}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}\right).\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}\right). \tag{25}$$

Pro jednoduchost jsme ve výrazech (24) a (25) nepsali argumenty u zadaných funkcí. Vztahy (24) a (25) jsou platné v každém časovém okamžiku, platí podél celé trajektorie, po níž se hmotný bod pohybuje. Proto nyní můžeme opět přejít k rovnicím, které závisí na čase. Symboly *q* a $\dot{q}$ tedy opět změní svůj význam a vrátí se ke svým původním významům: $q = q(t)$ bude znamenat okamžitou polohu hmotného bodu v libovolném čase a $\dot{q} = \frac{dq}{dt}(t)$ bude znamenat okamžitou rychlost hmotného bodu v libovolném čase.

To tedy znamená, že místo jednoho políčka filmu budeme opět sledovat celý promítaný film.

Vztah (24) tedy můžeme psát ve tvaru

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(t) = m\left(\frac{\partial x}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial q} = m\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial q} \tag{26}$$

a vztah (25) ve tvaru

$$\frac{\partial T}{\partial q}(t) = m\left(\frac{\partial x}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t}\right).\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t}\right) = m\frac{dx}{dt}.\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dx}{dt}\right). \tag{27}$$

Nyní vyčíslíme výraz $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(t)\right) - \frac{\partial T}{\partial q}(t)$ a s využitím vztahů (26) a (27) získáme výraz $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(t)\right) - \frac{\partial T}{\partial q}(t) = m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q} + m\frac{dx}{dt}.\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right) - m\frac{dx}{dt}.\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Vzhledem k tomu, že platí $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dx}{dt}\right)$, dostáváme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(t)\right) - \frac{\partial T}{\partial q}(t) = m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q} = F\frac{\partial x}{\partial q}. \tag{28}$$

Na základě vztahu (28) je možné definovat tzv. zobecněnou sílu, která udává průmět síly působící na hmotný bod do směru zobecněné souřadnice.

ZOBECNĚNÁ SÍLA Q JE DEFINOVÁNA VZTAHEM

$$Q = F\frac{\partial x}{\partial q}. \tag{29}$$

Zobecněná síla nemusí být silou v pravém slova smyslu. Pokud bude mít *q* význam vzdálenosti, pak $[Q] = \left[F\frac{\partial x}{\partial q}\right] = \mathrm{N}$ a *Q* je přímo síla. Zobecněnou souřadnicí *q* ovšem může být i např. úhel nebo jiná fyzikální veličina. V tom případě je význam *Q* jiný (moment sil, ...).

Nyní můžeme již formulovat Lagrageovu rovnici II. druhu.

LAGRANGEOVA ROVNICE II. DRUHU, KTERÁ POPISUJE POHYB JEDNOHO HMOTNÉHO BODU O HMOTNOSTI m PO ÚSEČCE, SE NAZÝVÁ ROVNICE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \tag{30}$$

T JE KINETICKÁ ENERGIE HMOTNÉHO BODU, q JE ZOBECNĚNÁ SOUŘADNICE A $\dot{q}$ JE ZOBECNĚNÁ RYCHLOST.