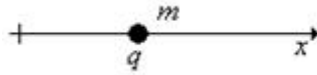


## Pohyb jedné částice po úsečce

Při odvozování pohybového [zákona](#), který využívá [zobecněné souřadnice](#) v [konfiguračním prostoru](#), začneme nejjednodušším případem: [pohybem](#) jedné [částice](#) (jednoho [hmotného bodu](#)) o hmotnosti  $m$  po úsečce (viz obr. 29). Tento systém bude obecně popsán holonomními [reonomními vazbami](#).



Obr. 29

[Trajektorii](#) hmotného bodu tedy popíšeme obecně funkcí

$$x(t) = x(q(t), t). \quad (20)$$

Místo vektorů, které používala při popisu pohybu hmotného bodu [Newtonova mechanika](#), použijeme skalární [fyzikální veličiny](#). Jednou z vhodných [skalárních veličin](#) je [kinetická energie](#) hmotného bodu, která je definována vztahem

$$T = \frac{1}{2} m v^2. \quad (21)$$

Vztah (21) lze přepsat ve tvaru  $T = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$ . Uvědomíme-li si, že [souřadnice](#) popisující polohu hmotného bodu závisí na čase podle vztahu (20), můžeme kinetickou energii psát ve tvaru

$$T = \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \quad (22)$$

a pro další výpočty je důležité si uvědomit, že kinetická energie je závislá na čase. Nyní ovšem vyšetříme chování této funkce v určitém vybraném čase  $t_0$ . Tento čas je ale vybrán libovolně, takže následující úvaha platí pro libovolný čas  $t$ . Přepíšeme vztah (22) přesněji:

$$T(q, \dot{q}, t_0) = \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial x}{\partial q}(q(t_0), t_0) \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}(q(t_0), t_0) \right)^2, \quad (23)$$

kde  $q = q(t_0)$  je okamžitá poloha hmotného bodu a  $\dot{q} = \frac{dq}{dt}(t_0)$  je [okamžitá rychlost](#), kterou se hmotný bod v čase  $t_0$  pohybuje. Vztahem (23) jsme přešli od  $\dot{q} = \frac{dq}{dt}(t_0)$  k  $\dot{q}$ , tj. od časové derivace zobecněné souřadnice k [zobecněné rychlosti](#). Od této chvíle jsou tedy  $q$  a  $\dot{q}$  nezávislé parametry.

Právě provedenou úvahu se „zastavením času“ si lze představit tak, že z pohybu, který natočíme na [film](#), nás bude zajímat jen jedno políčko vyvolaného filmu. A bude to právě to políčko, které bylo zaznamenáno v čase  $t_0$ .

Nyní určíme výrazy  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$  a  $\frac{\partial T}{\partial q}$ :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2} m \cdot 2 \left( \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial q} = m \left( \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial q} \quad (24)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{1}{2} m \cdot 2 \left( \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) = m \left( \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right). \quad (25)$$

Pro jednoduchost jsme ve výrazech (24) a (25) nepsali argumenty u zadaných funkcí. Vztahy (24) a (25) jsou platné v každém časovém okamžiku, platí podél celé trajektorie, po níž se hmotný bod pohybuje. Proto nyní můžeme opět přejít k rovnicím, které závisí na čase. Symboly  $q$  a  $\dot{q}$  tedy opět změni svůj význam a vrátí se ke svým původním významům:  $q = q(t)$  bude znamenat okamžitou polohu hmotného bodu v libovolném čase a  $\dot{q} = \frac{dq}{dt}(t)$  bude znamenat okamžitou rychlost hmotného bodu v libovolném čase.

To tedy znamená, že místo jednoho políčka filmu budeme opět sledovat celý promítaný film.

Vztah (24) tedy můžeme psát ve tvaru

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(t) = m \left( \frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial q} = m \frac{dx}{dt} \frac{\partial x}{\partial q} \quad (26)$$

a vztah (25) ve tvaru

$$\frac{\partial T}{\partial q}(t) = m \left( \frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) = m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{dx}{dt} \right). \quad (27)$$

Nyní vyčíslíme výraz  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(t) \right) - \frac{\partial T}{\partial q}(t)$  a s využitím vztahů (26) a (27) získáme výraz  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(t) \right) - \frac{\partial T}{\partial q}(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q} + m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q} \right) - m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{dx}{dt} \right)$ . Vzhledem k tomu, že platí  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q} \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{dx}{dt} \right)$ , dostáváme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(t) \right) - \frac{\partial T}{\partial q}(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q} = F \frac{\partial x}{\partial q}. \quad (28)$$

Na základě vztahu (28) je možné definovat tzv. zobecněnou sílu, která udává průmět [síly](#) působící na hmotný bod do směru zobecněné souřadnice.

**ZOBEČNĚNÁ SÍLA  $Q$  JE DEFINOVÁNA VZTAHEM**

$$Q = F \frac{\partial x}{\partial q}. \quad (29)$$

Zobecněná síla nemusí být silou v pravém slova smyslu. Pokud bude mít  $q$  význam vzdálenosti, pak  $[Q] = \left[ F \frac{\partial x}{\partial q} \right] = \text{N}$  a  $Q$  je přímo síla. Zobecněnou souřadnicí  $q$  ovšem může být i např. úhel nebo jiná fyzikální veličina. V tom případě je význam  $Q$  jiný ([moment sil](#), ...).

Nyní můžeme již formulovat Lagrangeovu rovnici II. druhu.

**LAGRANGEOVA ROVNICE II. DRUHOU, KTERÁ POPISUJE POHYB JEDNOHO HMTNÉHO BODU O HMTNOSTI  $m$  PO ÚSEČCE, SE NAZÝVÁ ROVNICE**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \quad (30)$$

**$T$  JE KINETICKÁ ENERGIE HMTNÉHO BODU,  $q$  JE ZOBEČNĚNÁ SOUŘADNICE A  $\dot{q}$  JE ZOBEČNĚNÁ RYCHLOST.**

Licence <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> zakazuje úpravy a komerční distribuci.