

Pohyb N hmotných bodů ve více dimenzích

Budeme uvažovat N hmotných bodů, které jsou podrobeny silám a vazbám a jejichž pohyb je popsán zobecněnými souřadnicemi (17). Tyto zobecněné souřadnice jsou svázány s kartézskými souřadnicemi vztahy (18). Odvození Lagrangeových rovnic druhého druhu pro soustavu hmotných N bodů bude velmi podobné jako odvození Lagrangeovy rovnice druhého druhu pro jeden hmotný bod. Proto bude odvození zde komentováno již méně.

Trajektorie hmotných bodů bude obecně popsána funkcemi

$$x^i(t) = x^i(q^j(t), t) \quad (31)$$

pro $i = 1, 2, \dots, 3N$ a $j = 1, 2, \dots, n$.

Kinetickou energii dané soustavy hmotných bodů lze psát ve tvaru

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2, \quad (32)$$

který lze dále rozepsat do tvaru

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right)^2. \quad (33)$$

Pro hmotnosti platí: $m_1 = m_2 = m_3 = m_{\text{prvního hmotného bodu}}$, $m_4 = m_5 = m_6 = m_{\text{druhého hmotného bodu}}$, ...

Nyní přepíšeme vztah (33) pro kinetickou energii soustavy hmotných bodů v konkrétním čase t_0 a provedeme formální záměnu časové derivace funkce $\frac{dq^k}{dt}$ za zobecněnou rychlost \dot{q}^k . Dostaneme tak

$$T(q^j, \dot{q}^j, t_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^k} (q^j(t_0), t_0) \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} (q^j(t_0), t_0) \right)^2. \quad (34)$$

Nyní určíme výrazy $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}$ a $\frac{\partial T}{\partial q^j}$. Dostáváme

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) \frac{\partial x^i}{\partial \dot{q}^j} \quad (35)$$

a

$$\frac{\partial T}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right). \quad (36)$$

Vztahy (35) a (36) byly odvozeny pro konkrétní čas t_0 , nicméně tento čas byl vybrán libovolně. Proto tyto vztahy platí pro libovolný čas t a je možné přejít opět ke vztahům, které jsou závislé na čase. Vztahy (35) a (36) tedy lze vyjádřit ve tvarech

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}(t) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial \dot{q}^j} \quad (37)$$

a

$$\frac{\partial T}{\partial q^j}(t) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\frac{dx^i}{dt} \right). \quad (38)$$

Vyčíslením výrazu $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q^j}(t) \right) - \frac{\partial T}{\partial q^j}(t)$ (pro $j=1, 2, \dots, n$) dostáváme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q^j}(t) \right) - \frac{\partial T}{\partial q^j}(t) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} + \frac{dx^i}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right) - \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\frac{dx^i}{dt} \right) \right)$$
 a po úpravě získáme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q^j}(t) \right) - \frac{\partial T}{\partial q^j}(t) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} \frac{\partial x^i}{\partial q^j}. \quad (39)$$

Na základě vztahu (39) můžeme definovat tzv. **zobecněnou sílu**.

ZOBECNĚNÁ SÍLA Q_j JE DEFINOVÁNA VZTAHEM

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \quad (40)$$

PRO $j=1, 2, \dots, n$.

Zobecněné síly Q_j nemusí být síly v pravém slova smyslu.

Nyní je již možné napsat Lagrangeovy rovnice druhého druhu.

LAGRANGEOVY ROVNICE II. DRUHU, KTERÉ POPISUJÍ POHYB SOUSTAVY N HMOTNÝCH BODŮ, SE NAZÝVAJÍ ROVNICE

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} = Q_j \quad (41)$$

PRO $j=1, 2, \dots, n$. PŘI TOM T JE KINETICKÁ ENERGIE SOUSTAVY HMOTNÝCH BODŮ, q^j JSOU ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICE A \dot{q}^j JSOU ZOBECNĚNÉ RYCHLOSTI.

Tyto rovnice jsou tedy pohybovými rovnicemi, které popisují pohyb dané soustavy hmotných bodů. Rovnice (41) vyjadřují Lagrangeovy rovnice II. druhu v nejobecnějším tvaru, který lze v určitých speciálních případech zjednodušit (viz 3.4).

Rovnice (41) tvoří soustavu n obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro neznámé funkce $q^j = q^j(t)$ (pro $j=1, 2, \dots, n$).

Na první pohled by se mohlo zdát, že to jsou rovnice parciální, protože v rovnicích (41) vystupují parciální derivace. Zápis $\frac{\partial T}{\partial q^j}$ resp. $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}$ představuje ovšem jen návod (pomůcku) na získání derivace kinetické energie. Samotné neznámé funkce $q^j = q^j(t)$ jsou závislé jen na čase, takže v upravených rovnicích (tj. už po provedení naznačených parciálních derivací) vystupují jen totální derivace \dot{q}^j podle času.