Pohyb N hmotných bodů ve více dimenzích

Budeme uvažovat *N* hmotných bodů, které jsou podrobeny silám a vazbám a jejichž pohyb je popsán zobecněnými souřadnicemi (17). Tyto zobecněné souřadnice jsou svázány s kartézskými souřadnicemi vztahy (18). Odvození Lagrangeových rovnic druhého druhu pro soustavu hmotných *N* bodů bude velmi podobné jako odvození Lagrangeovy rovnice druhého druhu pro jeden hmotný bod. Proto bude odvození zde komentováno již méně.

Trajektorie hmotných bodů bude obecně popsána funkcemi

$$x^{\mathrm{i}}(t) = x^{\mathrm{i}}\left(q^{\mathrm{j}}(t), t\right) \tag{31}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, 3N$ a $j = 1, 2, \ldots, n$.

Kinetickou energii dané soustavy hmotných bodů lze psát ve tvaru

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{3\mathrm{N}} m_{\mathrm{i}} \left(\frac{\mathrm{d}x^{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t}\right)^2, \tag{32}$$

který lze dále rozepsat do tvaru

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{3\mathrm{N}} m_{\mathrm{i}} \left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\partial x^{\mathrm{i}}}{\partial q^{\mathrm{k}}}\frac{\mathrm{d}q^{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial x^{\mathrm{i}}}{\partial t}\right)^2. \tag{33}$$

Pro hmotnosti platí: $m_1 = m_2 = m_3 = m_{\text{prvního hmotného bodu}}$, $m_4 = m_5 = m_6 = m_{\text{druhého hmotného bodu}}$, …

Nyní přepíšeme vztah (33) pro kinetickou energii soustavy hmotných bodů v konkrétním čase t_0 a provedeme formální záměnu časové derivace funkce $\frac{\mathrm{d}q^{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}t}$ za zobecněnou rychlost $\dot{q}^{\mathrm{k}}$. Dostaneme tak

$$T\left(q^{\mathrm{j}}, \dot{q}^{\mathrm{j}}, t_0\right) = \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{3\mathrm{N}} m_{\mathrm{i}} \left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\partial x^{\mathrm{i}}}{\partial q^{\mathrm{k}}}\left(q^{\mathrm{j}}(t_0), t_0\right)\dot{q}^{\mathrm{k}} + \frac{\partial x^{\mathrm{i}}}{\partial t}\left(q^{\mathrm{j}}(t_0), t_0\right)\right)^2. \tag{34}$$

Nyní určíme výrazy $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\mathrm{j}}}$ a $\frac{\partial T}{\partial q^{\mathrm{j}}}$. Dostáváme

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\mathrm{j}}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{3\mathrm{N}} m_{\mathrm{i}} \left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\partial x^{\mathrm{i}}}{\partial q^{\mathrm{k}}}\dot{q}^{\mathrm{k}} + \frac{\partial x^{\mathrm{i}}}{\partial t}\right)\frac{\partial x^{\mathrm{i}}}{\partial q^{\mathrm{j}}} \tag{35}$$

a

$$\frac{\partial T}{\partial q^{\mathrm{j}}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{3\mathrm{N}} m_{\mathrm{i}} \left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\partial x^{\mathrm{i}}}{\partial q^{\mathrm{k}}}\dot{q}^{\mathrm{k}} + \frac{\partial x^{\mathrm{i}}}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial q^{\mathrm{j}}}\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\partial x^{\mathrm{i}}}{\partial q^{\mathrm{k}}}\dot{q}^{\mathrm{k}} + \frac{\partial x^{\mathrm{i}}}{\partial t}\right). \tag{36}$$

Vztahy (35) a (36) byly odvozeny pro konkrétní čas t_0, nicméně tento čas byl vybrán libovolně. Proto tyto vztahy platí pro libovolný čas *t* a je možné přejít opět ke vztahům, které jsou závislé na čase. Vztahy (35) a (36) tedy lze vyjádřit ve tvarech

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\mathrm{j}}}(t) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{3\mathrm{N}} m_{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}x^{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x^{\mathrm{i}}}{\partial q^{\mathrm{j}}} \tag{37}$$

a

$$\frac{\partial T}{\partial q^j}(t) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{dx^i}{dt}\right). \tag{38}$$

Vyčíslením výrazu $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}(t)\right) - \frac{\partial T}{\partial q^j}(t)$ (pro $j = 1, 2, \ldots, n$) dostáváme $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}(t)\right) - \frac{\partial T}{\partial q^j}(t) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{d^2x^i}{dt^2}\frac{\partial x^i}{\partial q^j} + \frac{dx^i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j}\right) - \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)\right)$ a po úpravě získáme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}(t)\right) - \frac{\partial T}{\partial q^j}(t) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{d^2x^i}{dt^2}\frac{\partial x^i}{\partial q^j}. \tag{39}$$

Na základě vztahu (39) můžeme definovat tzv. zobecněnou sílu.

ZOBECNĚNÁ SÍLA Q_j JE DEFINOVÁNA VZTAHEM

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \tag{40}$$

PRO $j = 1, 2, \ldots, n$.

Zobecněné síly Q_j nemusí být síly v pravém slova smyslu.

Nyní je již možné napsat Lagrangeovy rovnice druhého druhu.

LAGRANGEOVY ROVNICE II. DRUHU, KTERÉ POPISUJÍ POHYB SOUSTAVY N HMOTNÝCH BODŮ, SE NAZÝVAJÍ ROVNICE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} = Q_j \tag{41}$$

PRO $j = 1, 2, \ldots, n$. PŘITOM T JE KINETICKÁ ENERGIE SOUSTAVY HMOTNÝCH BODŮ, q^j JSOU ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICE A $\dot{q}^j$ JSOU ZOBECNĚNÉ RYCHLOSTI.

Tyto rovnice jsou tedy pohybovými rovnicemi, které popisují pohyb dané soustavy hmotných bodů. Rovnice (41) vyjadřují Lagrangeovy rovnice II. druhu v nejobecnějším tvaru, který lze v určitých speciálních případech zjednodušit (viz 3.4).

Rovnice (41) tvoří soustavu *n* obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro neznámé funkce $q^j = q^j(t)$ (pro $j = 1, 2, \ldots, n$).

Na první pohled by se mohlo zdát, že to jsou rovnice parciální, protože v rovnicích (41) vystupují parciální derivace. Zápis $\frac{\partial T}{\partial q^j}$ resp. $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}$ představuje ovšem jen návod (pomůcku) na získání derivace kinetické energie. Samotné neznámé funkce $q^j = q^j(t)$ jsou závislé jen na čase, takže v upravených rovnicích (tj. už po provedení naznačených parciálních derivací) vystupují jen totální derivace q^j podle času.

© Encyklopedie Fyziky (http://fyzika.jreichl.com); Jaroslav Reichl, Martin Všetička
Licence http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/ zakazuje úpravy a komerční distribuci.