

## Konzervativní síly

V případě konzervativních sil bude možné Lagrangeovy rovnice 2. druhu (vztah (41)) přeformulovat jednodušeji. Nejdříve je nutné vědět, co jsou to konzervativní síly.

**SÍLY JSOU KONZERVATIVNÍ, JESTLIŽE PRÁCE SIL MEZI DVĚMA DANÝMI BODY NEZÁVISÍ NA TRAJEKTORII, PO KTERÉ SE HMOTNÝ BOD POHYBUJE.**

Právě uvedenou definici konzervativních sil lze přepsat i jinak:

**SÍLY JSOU KONZERVATIVNÍ, JESTLIŽE PRÁCE SIL PO UZAVŘENÉ KŘIVCE, PO KTERÉ SE HMOTNÝ BOD POHYBUJE, JE ROVNA NULE.**

Konzervativní síly jsou tedy ty síly, které mají potenciál (resp. pro které je definována [potenciální energie](#)).

Pro konzervativní sílu  $\vec{F}$  pak platí

$$\vec{F} = -\text{grad} V, \quad (42)$$

kde  $V$  je potenciál (přesněji [potenciální energie](#)). Zavedením potenciální energie vztahem (42) tak získáme ekvivalentní popis systému pomocí jedné [skalární veličiny](#)  $V$  místo [vektorové veličiny](#)  $\vec{F}$ .

Aplikujeme-li na vztah (42) diferenciální operátor [rotace](#), získáme  $\text{rot} \vec{F} = -\text{rot} \text{grad} V$ . Pravá strana této rovnice je identicky rovna nulovému vektoru, takže platí

$$\text{rot} \vec{F} = \vec{0}. \quad (43)$$

Tento vztah poskytuje návod, jak poznat, že dané [pole](#) je konzervativní.

S využitím (42) lze [zobecněnou sílu](#)  $Q_j$  definovanou vztahem (40) přepsat ve tvaru

$$Q_j = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial q^j}. \quad (44)$$

Vzhledem k tomu, že  $V = V(x^i(q^j))$ , lze vztah (44) přepsat na základě vztahu pro derivaci složené funkce ve tvaru

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q^j}. \quad (45)$$

Vzhledem k tomu, že potenciální energie  $V$  nezávisí na [zobecněných rychlostech](#)  $\dot{q}^j$ , je  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} = 0$  a tedy i  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} \right) = 0$ . Lze tedy formálně psát

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial V}{\partial q^j}. \quad (46)$$

Tím jsme získali výraz, je formálně velmi podobný levé straně Lagrangeových rovnic druhého druhu (41) a lze jej do těchto rovnic tedy dosadit. Můžeme proto psát  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial V}{\partial q^j}$  a s využitím vztahu pro derivaci součtu dvou funkcí jen upravit na tvar  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} (T - V) \right) - \frac{\partial}{\partial q^j} (T - V) = 0$ . Lagrangeovy rovnice druhého druhu lze nyní přepsat v zjednodušeném tvaru.

**LAGRANGEOVY ROVNICE II. DRUHOU POPISUJÍCÍ POHYB SOUSTAVY  $N$  HMOTNÝCH BODŮ V POLI KONZERVATIVNÍCH SIL JSOU ROVNICE VE TVARU**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \quad (47)$$

PRO  $j=1, 2, \dots, n$ . PŘITOM

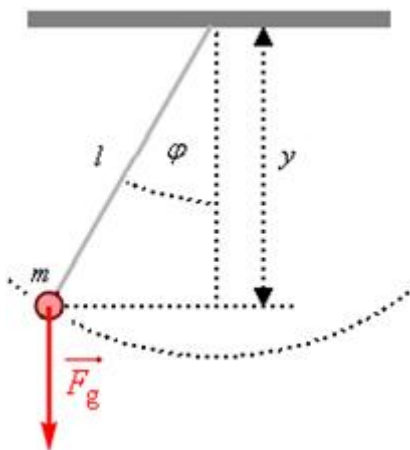
$$L(q^j, \dot{q}^j, t) = T - V \quad (48)$$

JE LAGRANGEOVA FUNKCE (RESP. TZV. LAGRANGIÁN),  $q^j$  JSOU **ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICE** A  $\dot{q}^j$  JSOU ZOBECNĚNÉ RYCHLOSTI.

Získali jsme opět soustavu  $n$  obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu s neznámými funkcemi  $q^j = q^j(t)$  (pro  $j=1, 2, \dots, n$ ), ale tentokrát (na rozdíl od (41)) vyjádřenou pomocí Lagrangeovy funkce  $L$ .  $L$  je funkce definovaná na varietě  $T_{PQ}$  (viz 3.2.4) a jedná o tzv. **invariant**, tj. hodnota této funkce se nezmění při transformaci soustavy [souřadnic](#).

Funkce  $L$  tedy „žije“ na varietě  $T_{PQ}$  a je definovaná v každém bodě. Symbol  $\frac{\partial L}{\partial q^j}$  přitom popisuje změnu funkce  $L$  při změně souřadnice  $q^j$ .

Použití (47) ukážeme na jednoduchém příkladu.



Obr. 30

Příklad: [Matematické kyvadlo](#)

Najděte úhlovou [frekvenci kmitání](#) matematického kyvadla, které je tvořeno hmotným bodem o hmotnosti  $m$  zavěšeným na vlákně zanedbatelné hmotnosti délky  $l$ .

Řešení: Matematické kyvadlo (viz obr. 30) popíšeme jednou zobecněnou souřadnicí a to úhlem  $\varphi$ , který svírá vlákno závěsu se svislým směrem (tj. s [rovnovážnou polohou kyvadla](#)). Postupně určíme [kinetickou energii](#)  $T$ , potenciální energii  $V$  a lagrangián  $L$ :

$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2$ ,  $V = -mgy = -mgl \cos \varphi$  a tedy  $L = T - V = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 + mgl \cos \varphi$ . V tuto chvíli zvolíme libovolný časový okamžik a v něm určíme derivace lagrangiánu, které vystupují v Lagrangeových rovnicích druhého druhu (vztah (47)). Symbol  $\dot{\varphi}$  tedy znamená zobecněnou rychlost.

To znamená, že „vypneme“ čas a určíme příslušné derivace.

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$  a  $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi$ . Nyní přejdeme od konkrétního časového okamžiku, v němž jsme určili derivace lagrangiánu, k libovolnému času  $t$ . To znamená, že symbol  $\dot{\varphi}$  bude nyní vyjadřovat

časovou derivaci úhlu  $\varphi$ , tj.  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi(t)}{dt}$ .

Nyní tedy opět „zapneme“ plynutí času. Od teď dále jsou funkce  $\varphi$  i  $\dot{\varphi}$  závislé na čase. Doteď tomu tak nebylo -  $\dot{\varphi}$  jsme nederivovali jako složenou funkci!

Proto  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = ml^2 \ddot{\varphi}$  a tedy po dosazení do Lagrangeovy rovnice druhého druhu získáme  $ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0$ . Tuto rovnici lze přepsat ve tvaru  $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$ , což je poměrně složitá diferenciální rovnice, neboť neznámá funkce se vyskytuje i v argumentu goniometrické funkce. Pokud se spokojíme s řešením pro malé [výchyly](#)  $\varphi$  lze rovnici s využitím Taylorova rozvoje přepsat ve tvaru  $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$ .

Tato rovnice popisuje [harmonické kmitání](#) s úhlovou frekvencí  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

---

© **Encyklopedie Fyziky** (<http://fyzika.jreichl.com>); **Jaroslav Reichl, Martin Všeticka**  
Licence <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> zakazuje úpravy a komerční distribuci.