Konzervativní síly

V případě konzervativních sil bude možné Lagrangeovy rovnice 2. druhu (vztah (41)) přeformulovat jednodušeji. Nejdříve je nutné vědět, co jsou to konzervativní síly.

SÍLY JSOU KONZERVATIVNÍ, JESTLIŽE PRÁCE SIL MEZI DVĚMA DANÝMI BODY NEZÁVISÍ NA TRAJEKTORII, PO KTERÉ SE HMOTNÝ BOD POHYBUJE.

Právě uvedenou definici konzervativních sil lze přepsat i jinak:

SÍLY JSOU KONZERVATIVNÍ, JESTLIŽE PRÁCE SIL PO UZAVŘENÉ KŘIVCE, PO KTERÉ SE HMOTNÝ BOD POHYBUJE, JE ROVNA NULE.

Konzervativní síly jsou tedy ty síly, které mají potenciál (resp. pro které je definována potenciální energie).

Pro konzervativní sílu $\vec{F}$ pak platí

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} V, \tag{42}$$

kde V je potenciál (přesněji potenciální energie). Zavedením potenciální energie vztahem (42) tak získáme ekvivalentní popis systému pomocí jedné skalární veličiny V místo vektorové veličiny $\vec{F}$.

Aplikujeme-li na vztah (42) diferenciální operátor rotace, získáme $\operatorname{rot}\vec{F} = -\operatorname{rot}\operatorname{grad} V$. Pravá strana této rovnice je identicky rovna nulovému vektoru, takže platí

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{o}\,. \tag{43}$$

Tento vztah poskytuje návod, jak poznat, že dané pole je konzervativní.

S využitím (42) lze zobecněnou sílu Q_j definovanou vztahem (40) přepsat ve tvaru

$$Q_j = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial q^j}\,. \tag{44}$$

Vzhledem k tomu, že $V = V\left(x^i\left(q^j\right)\right)$, lze vztah (44) přepsat na základě vztahu pro derivaci složené funkce ve tvaru

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q^j}\,. \tag{45}$$

Vzhledem k tomu, že potenciální energie V nezávisí na zobecněných rychlostech $\dot{q}^j$, je $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} = 0$ a tedy i $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j}\right) = 0$. Lze tedy formálně psát

$$Q_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial V}{\partial q^j}\,. \tag{46}$$

Tím jsme získali výraz, je formálně velmi podobný levé straně Lagrangeových rovnic druhého druhu (41) a lze jej do těchto rovnic tedy dosadit. Můžeme proto psát $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial V}{\partial q^j}$ a s využitím vztahu pro derivaci součtu dvou funkcí jen upravit na tvar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}(T - V)\right) - \frac{\partial}{\partial q^j}(T - V) = 0$.

Lagrangeovy rovnice druhého druhu lze nyní přepsat v zjednodušeném tvaru.

LAGRANGEOVY ROVNICE II. DRUHU POPISUJÍCÍ POHYB SOUSTAVY N HMOTNÝCH BODŮ V POLI KONZERVATIVNÍCH SIL JSOU ROVNICE VE TVARU

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \tag{47}$$

PRO $j = 1, 2, \ldots, n$. PŘITOM

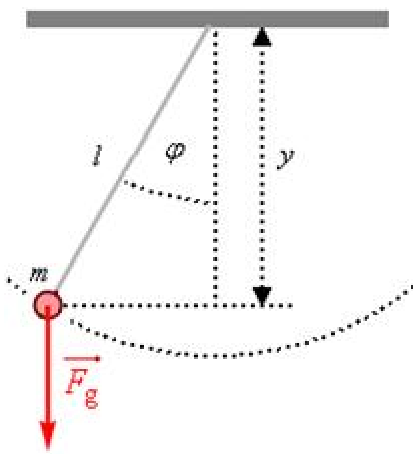
$$L\left(q^j, \dot{q}^j, t\right) = T - V \tag{48}$$

JE LAGRANGEOVA FUNKCE (RESP. TZV. LAGRANGIÁN), q^j JSOU ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICE A $\dot{q}^j$ JSOU ZOBECNĚNÉ RYCHLOSTI.

Získali jsme opět soustavu *n* obyčejných diferenciální rovnic druhého řádu s neznámými funkcemi $q^j = q^j(t)$ (pro $j = 1, 2, \ldots, n$), ale tentokráte (na rozdíl od (41)) vyjádřenou pomocí Lagrangeovy funkce *L*. *L* je funkce definovaná na varietě T_{PQ} (viz 3.2.4) a jedná o tzv. **invariant**, tj. hodnota této funkce se nezmění při transformaci soustavy souřadnic.

Funkce *L* tedy „žije“ na varietě T_{PQ} a je definovaná v každém bodě. Symbol $\frac{\partial L}{\partial q^j}$ přitom popisuje změnu funkce *L* při změně souřadnice q^j.

Použití (47) ukážeme na jednoduchém příkladu.



Obr. 30

Příklad: Matematické kyvadlo

Najděte úhlovou frekvenci kmitání matematického kyvadla, které je tvořeno hmotným bodem o hmotnosti *m* zavěšeným na vlákně zanedbatelné hmotnosti délky *l*.

Řešení: Matematické kyvadlo (viz obr. 30) popíšeme jednou zobecněnou souřadnicí a to úhlem φ, který svírá vlákno závěsu se svislým směrem (tj. s rovnovážnou polohou kyvadla). Postupně určíme kinetickou energii *T*, potenciální energii *V* a lagrangián *L*:

$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(l\dot{\varphi}\right)^2$, $V = -mgy = -mgl\cos\varphi$ a tedy $L = T - V = \frac{1}{2}m\left(l\dot{\varphi}\right)^2 + mgl\cos\varphi$. V tuto chvíli zvolíme libovolný časový okamžik a v něm určíme derivace lagrangiánu, které vystupují v Lagrangeových rovnicích druhého druhu (vztah (47)). Symbol $\dot{\varphi}$ tedy znamená zobecněnou rychlost.

To znamená, že „vypneme“ čas a určíme příslušné derivace.

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$ a $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi$. Nyní přejdeme od konkrétního časového okamžiku, v němž jsme určili derivace lagrangiánu, k libovolnému času *t*. To znamená, že symbol $\dot{\varphi}$ bude nyní vyjadřovat časovou derivaci úhlu φ, tj. $\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}$.

Nyní tedy opět „zapneme“ plynutí času. Od teď dále jsou funkce φ i $\dot{\varphi}$ závislé na čase. Doteď tomu tak nebylo - $\dot{\varphi}$ jsme nederivovali jako složenou funkci!

Proto $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi}$ a tedy po dosazení do Lagrangeovy rovnice druhého druhu získáme $ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$. Tuto rovnici lze přepsat ve tvaru $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$, což je poměrně složitá diferenciální rovnice, neboť neznámá funkce se vyskytuje i v argumentu goniometrické funkce. Pokud se spokojíme s řešením pro malé výchylky φ lze rovnici s využitím Taylorova rozvoje přepsat ve tvaru $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$.

Tato rovnice popisuje harmonické kmitání s úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.
