

### \*\*\*Přesné řešení matematického kyvadla

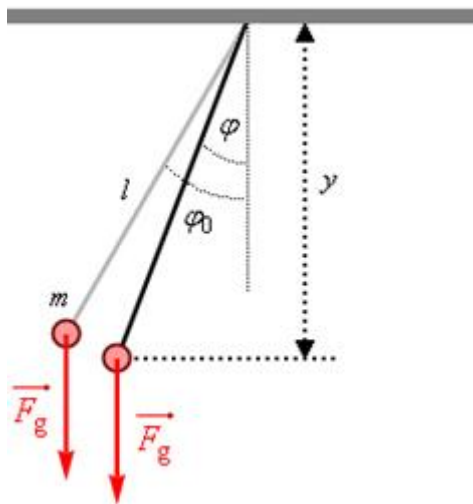
Přesné řešení pohybové rovnice matematického kyvadla vyžaduje hlubší znalosti z matematiky a použití některých speciálních substitucí a integrálů.

Pohybovou rovnici matematického kyvadla lze odvodit různými způsoby: pomocí [lagrangiánu](#) a nebo pomocí [zákonu zachování mechanické energie](#). Nebudeme-li uvažovat vnější [síly](#), přejde zákon zachování [mechanické energie](#) na [zákon zachování energie](#) (jiné formy než mechanické nebude [energie](#) mít) a bude tedy platit

$$T + V = E = \text{konst.} \quad (49)$$

[Kinetickou energii](#)  $T$  a [potenciální energii](#)  $V$  lze psát s využitím obr. 31, ve kterém je vyznačena [maximální výchylka](#) (počáteční [výchylka](#)) matematického kyvadla popsána úhlem  $\varphi_0$  a [okamžitá výchylka](#) popsána úhlem  $\varphi$ . Kinetická energie je  $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$ , potenciální energie je  $V = -mgy = -mgl \cos \varphi$ . [Celková energie](#) je rovna potenciální energii na začátku [pohybu](#) matematického kyvadla, tj.  $E = -mgl \cos \varphi_0$ .

Znaménko mínus je ve vztahu pro potenciální energii proto, že při zvětšování výchylky [kyvadla](#) musí růst jeho potenciální energie. Okamžitá výchylka  $y$ , která ve vztahu pro potenciální energii vystupuje, by ovšem s rostoucím úhlem  $\varphi$  bez použití znaménka mínus klesala.



Obr. 31

Dosazením do vztahu (49) získáme rovnici

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = -mgl \cos \varphi_0, \quad (50)$$

z níž lze vyjádřit časovou derivaci  $\dot{\varphi}$  ve tvaru

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2 \frac{g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}. \quad (51)$$

Rovnici (51) lze formálně odvodit též z rovnice  $\dot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$ . Vynásobíme-li jí  $\dot{\varphi}$ , získáme  $\dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = 0$ , kterou lze přepsat do tvaru  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \right) - \frac{g}{l} \frac{d}{dt} (\cos \varphi) = 0$ . S využitím vlastnosti součtu

derivací lze psát  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l} \cos \varphi \right) = 0$  a tedy  $\dot{\varphi}^2 - \frac{2g}{l} \cos \varphi = \text{konst.}$ , odkud lze po vhodné volbě konstanty na pravé straně rovnice vyjádřit  $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}$ . Tato rovnice je shodná s rovnicí (51).

Získali jsme tedy diferenciální rovnici, kterou lze řešit separací proměnných. Můžeme proto psát  $\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}$  a odtud

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}. \quad (52)$$

Řešení rovnice (52) lze nalézt integrováním v mezích od 0 do  $\varphi_0$ , čímž získáme čtvrtinu hledané periody  $T$  matematického kyvadla.

**Hmotný bod** o hmotnosti  $m$ , který je zavěšen na vlákně délky  $l$  (viz obr. 31), tak opíše trajektorii, která odpovídá polovině kyvu kyvadla, tj. čtvrtině kmitu.

Tedy

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}. \quad (53)$$

Nyní je nutné vyřešit pravou stranu rovnice (53). Nejdříve přepíšeme výraz

$$\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0} \quad (54)$$

s využitím goniometrického vztahu

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{2}, \quad (55)$$

z něhož vyjádříme  $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$  a dosadíme do vztahu (54). Získáme tak

$$\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0} = \sqrt{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (56)$$

a zavedeme substituci

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \psi. \quad (57)$$

Zavedením této substituce se mění integrační meze ve vztahu (53). Je-li  $\varphi \in (0; \varphi_0)$ , pak na základě vztahu (57) je  $\psi \in (0; \frac{\pi}{2})$  (uvažujeme-li pouze fyzikální aplikace dané substituce). Zároveň je nutné si uvědomit, že pro derivaci právě zavedeného substitučního vztahu platí

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos \psi d\psi. \quad (58)$$

Dosazením vztahu (57) do vztahu (56) a následnými úpravami postupně získáme

$$\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0} = \sqrt{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \sqrt{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi} = \sqrt{2} \sin \frac{\varphi_0}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \psi}, \text{ tedy}$$

$$\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0} = \sqrt{2} \sin\frac{\varphi_0}{2} \cos\psi. \quad (59)$$

Všechny úpravy provádíme s ohledem na fyzikální situaci, kterou řešíme. Obecně některé vztahy neplatí - nejsou splněny všechny matematické podmínky. Fyzikální situace je ovšem taková, že uvažované podmínky splněné jsou. Např. úprava  $\sqrt{1 - \sin^2\psi} = \cos\psi$  provedená ve vztahu (59) není matematicky korektní - správně by mělo být  $\sqrt{1 - \sin^2\psi} = |\cos\psi|$ , nicméně hodnoty úhlů  $\psi$  mimo interval  $\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  (tj. pro záporné hodnoty funkce kosinus) nemají v dané situaci fyzikální smysl.

Dosazením vztahů (59) a (58) do vztahu (53) dostáváme  $\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin\frac{\varphi_0}{2} \cos\psi \, d\psi}{\cos\frac{\varphi}{2} \sqrt{2} \sin\frac{\varphi_0}{2} \cos\psi}$  a po

postupných úpravách získáme  $\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\frac{\varphi}{2}} \, d\psi = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} \, d\psi$ . Po dosazení ze vztahu (57)

a vynásobením rovnice čtyřmi tedy máme

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2} \sin^2\psi}} \, d\psi, \quad (60)$$

kde

$$K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2} \sin^2\psi}} \, d\psi \quad (61)$$

je **úplný eliptický integrál prvního druhu**. Řešení těchto typů integrálů jsou tabelována resp. jsou doporučené další postupy při jejich řešení.

Řešení integrálu (61) spočívá v rozepsání integrandu pomocí Taylorova rozvoje ve tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2} \sin^2\psi}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{(2m-1)!!}{2^m} \left(\sin\frac{\varphi_0}{2} \sin\psi\right)^{2m}, \quad (62)$$

kde  $(2m-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1)$ . Rozvoj výrazu (62) je možné dále rozepsat ve tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2} \sin^2\psi}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\sin\frac{\varphi_0}{2} \sin\psi\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\sin\frac{\varphi_0}{2} \sin\psi\right)^4 + \frac{15}{48} \left(\sin\frac{\varphi_0}{2} \sin\psi\right)^6 + \dots \quad (63)$$

V integrálu (61) tedy dostaneme součet výrazů ze vztahu (63), v nichž vystupují integrály  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\psi \, d\psi$

pro  $m = 1, 2, \dots$ . Z tabulek získáme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} \psi d\psi = \frac{\pi (2m-1)!!}{2 (2m)!!}, \quad (64)$$

kde  $(2m)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2m = 2^m m!$ .

Po dosazení vztahu (64) do vztahu (63) a následně do vztahů (61) a (60) získáme

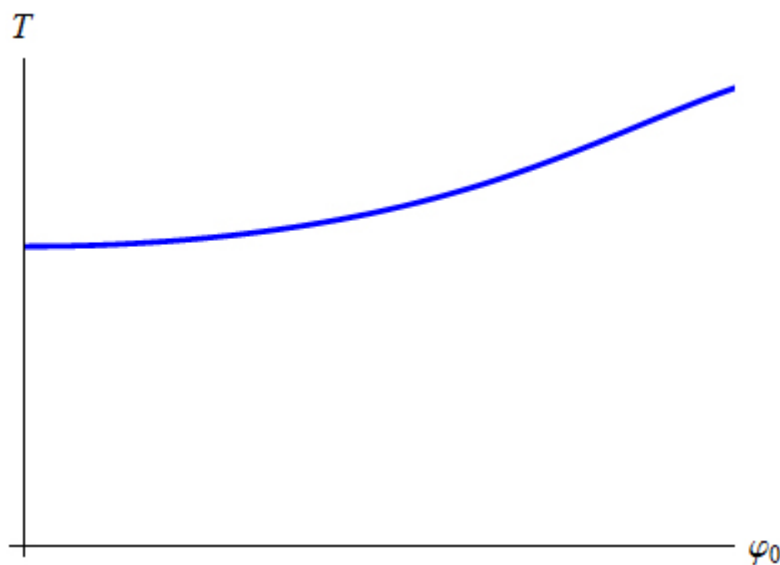
$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \psi \right)^2 + \frac{3}{8} \left( \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \psi \right)^4 + \frac{15}{48} \left( \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \psi \right)^6 + \dots \right) d\psi \text{ a tedy}$$

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{9\pi}{128} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{25\pi}{512} \sin^6 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right). \quad (65)$$

Vytkneme-li ve výrazu (65)  $\frac{\pi}{2}$ , získáme

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{25}{256} \sin^6 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right). \quad (66)$$

První člen výrazu (66) odpovídá periodě matematického kyvadla pro malé výchylky. Ostatní členy je možné v tomto kontextu chápat jako opravy periody pro konkrétní počáteční výchylku (maximální výchylku) popsanou úhlem  $\varphi_0$ . Graf závislosti periody na počáteční výchylce popsané úhlem  $\varphi_0$  je na obr. 32. Ačkoliv to tak z grafu na první pohled nevypadá, perioda [kmitání](#) matematického kyvadla pro velké počáteční výchylky prudce narůstá.



Obr. 32