***Přesné řešení matematického kyvadla

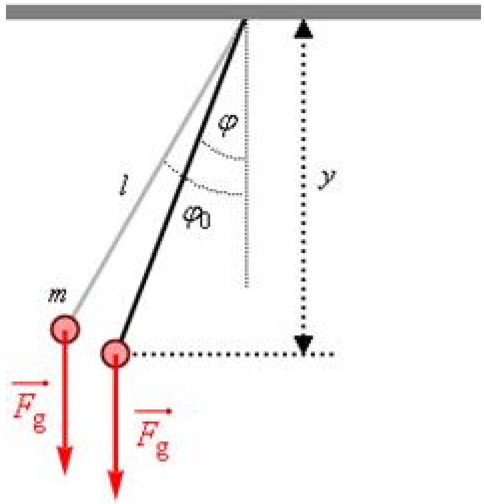
Přesné řešení pohybové rovnice matematického kyvadla vyžaduje hlubší znalosti z matematiky a použití některých speciálních substitucí a integrálů.

Pohybovou rovnici matematického kyvadla lze odvodit různými způsoby: pomocí lagrangiánu a nebo pomocí zákona zachování mechanické energie. Nebudeme-li uvažovat vnější síly, přejde zákon zachování mechanické energie na zákon zachování energie (jiné formy než mechanické nebude energie mít) a bude tedy platit

$$T + V = E = konst. \tag{49}$$

Kinetickou energii *T* a potenciální energii *V* lze psát s využitím obr. 31, ve kterém je vyznačena maximální výchylka (počáteční výchylka) matematického kyvadla popsaná úhlem φ_0 a okamžitá výchylka popsaná úhlem φ. Kinetická energie je $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$, potenciální energie je $V = -mgy = -mgl\cos\varphi$. Celková energie je rovna potenciální energii na začátku pohybu matematického kyvadla, tj. $E = -mgl\cos\varphi_0$.

> Znaménko mínus je ve vztahu pro potenciální energii proto, že při zvětšování výchylky kyvadla musí růst jeho potenciální energie. Okamžitá výchylka *y*, která ve vztahu pro potenciální energii vystupuje, by ovšem s rostoucím úhlem φ bez použití znaménka mínus klesala.



Obr. 31

Dosazením do vztahu (49) získáme rovnici

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi = -mgl\cos\varphi_0, \tag{50}$$

z níž lze vyjádřit časovou derivaci $\dot{\varphi}$ ve tvaru

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2\frac{g}{l}\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right)}. \tag{51}$$

Rovnici (51) lze formálně odvodit též z rovnice $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$. Vynásobíme-li jí $\dot{\varphi}$, získáme $\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi\dot{\varphi} = 0$, kterou lze přepsat do tvaru $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\right) - \frac{g}{l}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\varphi) = 0$. S využitím vlastnosti součtu derivací lze psát $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l}\cos\varphi\right) = 0$ a tedy $\dot{\varphi}^2 - \frac{2g}{l}\cos\varphi = konst.$, odkud lze po vhodné volbě konstanty na pravé straně rovnice vyjádřit $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$. Tato rovnice je shodná s rovnicí (51).

Získali jsme tedy diferenciální rovnici, kterou lze řešit separací proměnných. Můžeme proto psát $\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$ a odtud

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}. \tag{52}$$

Řešení rovnice (52) lze nalézt integrováním v mezích od 0 do φ_0, čímž získáme čtvrtinu hledané periody T matematického kyvadla.

Hmotný bod o hmotnosti *m*, který je zavěšen na vlákně délky *l* (viz obr. 31), tak opíše trajektorii, která odpovídá polovině kyvu kyvadla, tj. čtvrtině kmitu.

Tedy

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}. \tag{53}$$

Nyní je nutné vyřešit pravou stranu rovnice (53). Nejdříve přepíšeme výraz

$$\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0} \tag{54}$$

s využitím goniometrického vztahu

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos\varphi}{2}, \tag{55}$$

z něhož vyjádříme $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ a dosadíme do vztahu (54). Získáme tak

$$\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0} = \sqrt{2}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}} \tag{56}$$

a zavedeme substituci

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_0}{2}.\sin\psi. \tag{57}$$

Zavedením této substituce se mění integrační meze ve vztahu (53). Je-li $\varphi \in \langle 0; \varphi_0 \rangle$, pak na základě vztahu (57) je $\psi \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ (uvažujeme-li pouze fyzikální aplikace dané substituce). Zároveň je nutné si uvědomit, že pro derivaci právě zavedeného substitučního vztahu platí

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = \sin\frac{\varphi_0}{2}.\cos\psi.d\psi. \tag{58}$$

Dosazením vztahu (57) do vztahu (56) a následnými úpravami postupně získáme $\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0} = \sqrt{2}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{2}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi} = \sqrt{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}\sqrt{1 - \sin^2\psi}$, tedy

$$\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0} = \sqrt{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\psi\ . \tag{59}$$

Všechny úpravy provádíme s ohledem na fyzikální situaci, kterou řešíme. Obecně některé vztahy neplatí - nejsou splněny všechny matematické podmínky. Fyzikální situace je ovšem taková, že uvažované podmínky splněné jsou. Např. úprava $\sqrt{1-\sin^2\psi} = \cos\psi$ provedená ve vztahu (59) není matematicky korektní - správně by mělo být $\sqrt{1-\sin^2\psi} = |\cos\psi|$, nicméně hodnoty úhlů ψ mimo interval $\psi \in \left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$ (tj. pro záporné hodnoty funkce kosinus) nemají v dané situaci fyzikální smysl.

Dosazením vztahů (59) a (58) do vztahu (53) dostáváme $\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\cos\frac{\varphi}{2}} \frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}.\cos\psi.\mathrm{d}\psi}{\sqrt{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\psi}$ a po postupných úpravách získáme $\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\frac{\varphi}{2}}\mathrm{d}\psi = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}\mathrm{d}\psi$. Po dosazení ze vztahu (57) a vynásobení rovnice čtyřmi tedy máme

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi}}\mathrm{d}\psi\ , \tag{60}$$

kde

$$K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi}}\mathrm{d}\psi \tag{61}$$

je **úplný eliptický integrál prvního druhu**. Řešení těchto typů integrálů jsou tabelována resp. jsou doporučené další postupy při jejich řešení.

Řešení integrálu (61) spočívá v rozepsání integrandu pomocí Taylorova rozvoje ve tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{(2m-1)!!}{2^m}\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\psi\right)^{2m}\ , \tag{62}$$

kde $(2m-1)!! = 1.3.\ldots.(2m-1)$. Rozvoj výrazu (62) je možné dále rozepsat ve tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\psi\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\psi\right)^4 + \frac{15}{48}\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\psi\right)^6 + \ldots . \tag{63}$$

V integrálu (61) tedy dostaneme součet výrazů ze vztahu (63), v nichž vystupují integrály $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\psi\,\mathrm{d}\psi$ pro $m = 1, 2, \ldots$. Z tabulek získáme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} \psi \, \mathrm{d}\psi = \frac{\pi}{2} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}, \tag{64}$$

kde $(2m)!! = 2.4.6.\ldots.2m = 2^m m!$.

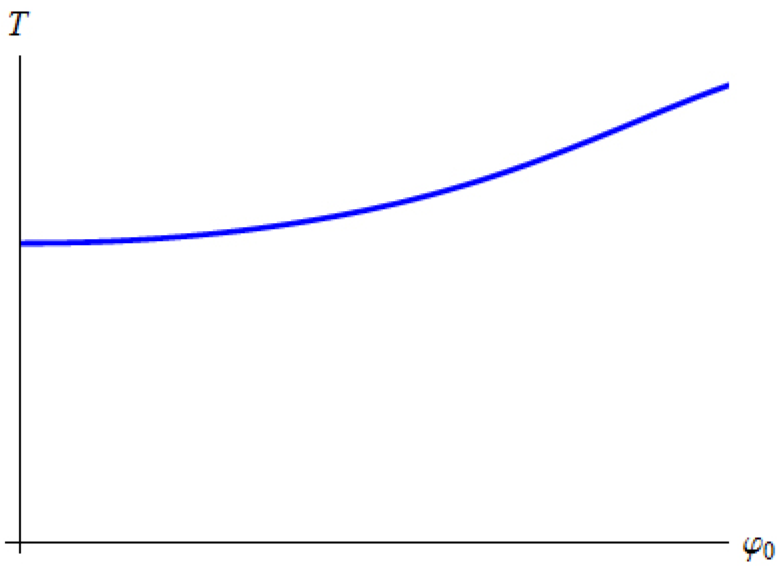
Po dosazení vztahu (64) do vztahu (63) a následně do vztahů (61) a (60) získáme $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\psi\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\psi\right)^4 + \frac{15}{48}\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\psi\right)^6 + \ldots\right) \mathrm{d}\psi$ a tedy

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \frac{9\pi}{128}\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \frac{25\pi}{512}\sin^6\frac{\varphi_0}{2} + \ldots\right). \tag{65}$$

Vytkneme-li ve výrazu (65) $\frac{\pi}{2}$, získáme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \frac{25}{256}\sin^6\frac{\varphi_0}{2} + \ldots\right). \tag{66}$$

První člen výrazu (66) odpovídá periodě matematického kyvadla pro malé výchylky. Ostatní členy je možné v tomto kontextu chápat jako opravy periody pro konkrétní počáteční výchylku (maximální výchylku) popsanou úhlem φ_0. Graf závislosti periody na počáteční výchylce popsané úhlem φ_0 je na obr. 32. Ačkoliv to tak z grafu na první pohled nevypadá, perioda kmitání matematického kyvadla pro velké počáteční výchylky prudce narůstá.



Obr. 32