***Přesné řešení matematického kyvadla

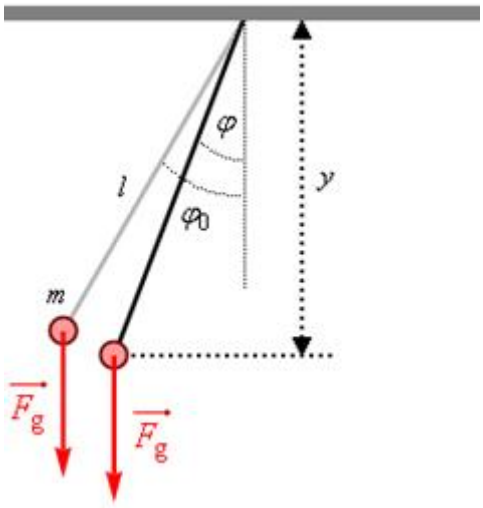
Přesné řešení pohybové rovnice matematického kyvadla vyžaduje hlubší znalosti z matematiky a použití některých speciálních substitucí a integrálů.

Pohybovou rovnici matematického kyvadla lze odvodit různými způsoby: pomocí lagrangiánu a nebo pomocí zákona zachování mechanické energie. Nebudeme-li uvažovat vnější síly, přejde zákon zachování mechanické energie na zákon zachování energie (jiné formy než mechanické nebude energie mít) a bude tedy platit

$$T + V = E = konst. \tag{49}$$

Kinetickou energii T a potenciální energii V lze psát s využitím obr. 31, ve kterém je vyznačena maximální výchylka (počáteční výchylka) matematického kyvadla popsaná úhlem φ_0 a okamžitá výchylka popsaná úhlem φ. Kinetická energie je $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$, potenciální energie je $V = -mgy = -mgl\cos\varphi$. Celková energie je rovna potenciální energii na začátku pohybu matematického kyvadla, tj. $E = -mgl\cos\varphi_0$.

Znaménko mínus je ve vztahu pro potenciální energii proto, že při zvětšování výchylky kyvadla musí růst jeho potenciální energie. Okamžitá výchylka y, která ve vztahu pro potenciální energii vystupuje, by ovšem s rostoucím úhlem φ bez použití znaménka mínus klesala.



Obr. 31

Dosazením do vztahu (49) získáme rovnici

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi = -mgl\cos\varphi_0, \tag{50}$$

z níž lze vyjádřit časovou derivaci $\dot{\varphi}$ ve tvaru

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2\frac{g}{l}\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right)}. \tag{51}$$

Rovnici (51) lze formálně odvodit též z rovnice $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$. Vynásobíme-li jí $\dot{\varphi}$, získáme $\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi\dot{\varphi} = 0$, kterou lze přepsat do tvaru $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\right) - \frac{g}{l}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\varphi) = 0$. S využitím vlastnosti součtu

derivací lze psát $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2-\frac{g}{l}\cos\varphi\right)=0$ a tedy $\dot{\varphi}^2-\frac{2g}{l}\cos\varphi=konst.$, odkud lze po vhodné volbě konstanty na pravé straně rovnice vyjádřit $\dot{\varphi}=\sqrt{\frac{2g}{l}\left(\cos\varphi-\cos\varphi_0\right)}$. Tato rovnice je shodná s rovnicí (51).

Získali jsme tedy diferenciální rovnici, kterou lze řešit separací proměnných. Můžeme proto psát $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\sqrt{2\frac{g}{l}\left(\cos\varphi-\cos\varphi_0\right)}$ a odtud

$$\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}. \tag{52}$$

Řešení rovnice (52) lze nalézt integrováním v mezích od 0 do φ_0, čímž získáme čtvrtinu hledané periody *T* matematického kyvadla.

Hmotný bod o hmotnosti *m*, který je zavěšen na vlákně délky *l* (viz obr. 31), tak opíše trajektorii, která odpovídá polovině kyvu kyvadla, tj. čtvrtině kmitu.

Tedy

$$\frac{T}{4}=\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}. \tag{53}$$

Nyní je nutné vyřešit pravou stranu rovnice (53). Nejdříve přepíšeme výraz

$$\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0} \tag{54}$$

s využitím goniometrického vztahu

$$\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{2}, \tag{55}$$

z něhož vyjádříme $\cos\varphi=1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ a dosadíme do vztahu (54). Získáme tak

$$\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}=\sqrt{2}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}} \tag{56}$$

a zavedeme substituci

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\sin\frac{\varphi_0}{2}.\sin\psi. \tag{57}$$

Zavedením této substituce se mění integrační meze ve vztahu (53). Je-li $\varphi\in\langle 0;\varphi_0\rangle$, pak na základě vztahu (57) je $\psi\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$ (uvažujeme-li pouze fyzikální aplikace dané substituce). Zároveň je nutné si uvědomit, že pro derivaci právě zavedeného substitučního vztahu platí

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi=\sin\frac{\varphi_0}{2}.\cos\psi.\mathrm{d}\psi. \tag{58}$$

Dosazením vztahu (57) do vztahu (56) a následnými úpravami postupně získáme $\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}=\sqrt{2}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}=\sqrt{2}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi}=\sqrt{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}\sqrt{1-\sin^2\psi}$, tedy

$$\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0} = \sqrt{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\psi\,. \tag{59}$$

Všechny úpravy provádíme s ohledem na fyzikální situaci, kterou řešíme. Obecně některé vztahy neplatí - nejsou splněny všechny matematické podmínky. Fyzikální situace je ovšem taková, že uvažované podmínky splněné jsou. Např. úprava $\sqrt{1-\sin^2\psi} = \cos\psi$ provedená ve vztahu (59) není matematicky korektní - správně by mělo být $\sqrt{1-\sin^2\psi} = |\cos\psi|$, nicméně hodnoty úhlů ψ mimo interval $\psi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ (tj. pro záporné hodnoty funkce kosinus) nemají v dané situaci fyzikální smysl.

Dosazením vztahů (59) a (58) do vztahu (53) dostáváme $\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\cos\frac{\varphi}{2}} \frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}.\cos\psi.\mathrm{d}\psi}{\sqrt{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\psi}$ a po postupných úpravách získáme $\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\frac{\varphi}{2}}\mathrm{d}\psi = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}\mathrm{d}\psi$. Po dosazení ze vztahu (57) a vynásobení rovnice čtyřmi tedy máme

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi}}\mathrm{d}\psi\,, \tag{60}$$

kde

$$K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi}}\mathrm{d}\psi \tag{61}$$

je **úplný eliptický integrál prvního druhu**. Řešení těchto typů integrálů jsou tabelována resp. jsou doporučené další postupy při jejich řešení.

Řešení integrálu (61) spočívá v rozepsání integrandu pomocí Taylorova rozvoje ve tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{(2m-1)!!}{2^m}\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\psi\right)^{2m}\,, \tag{62}$$

kde $(2m-1)!! = 1.3.\ldots.(2m-1)$. Rozvoj výrazu (62) je možné dále rozepsat ve tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\psi\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\psi\right)^4 + \frac{15}{48}\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\psi\right)^6 + \ldots\,. \tag{63}$$

V integrálu (61) tedy dostaneme součet výrazů ze vztahu (63), v nichž vystupují integrály $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\psi\mathrm{d}\psi$ pro $m = 1, 2, \ldots$. Z tabulek získáme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\psi \,\mathrm{d}\psi = \frac{\pi}{2}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}, \tag{64}$$

kde $(2m)!! = 2.4.6.\ldots.2m = 2^m m!$.

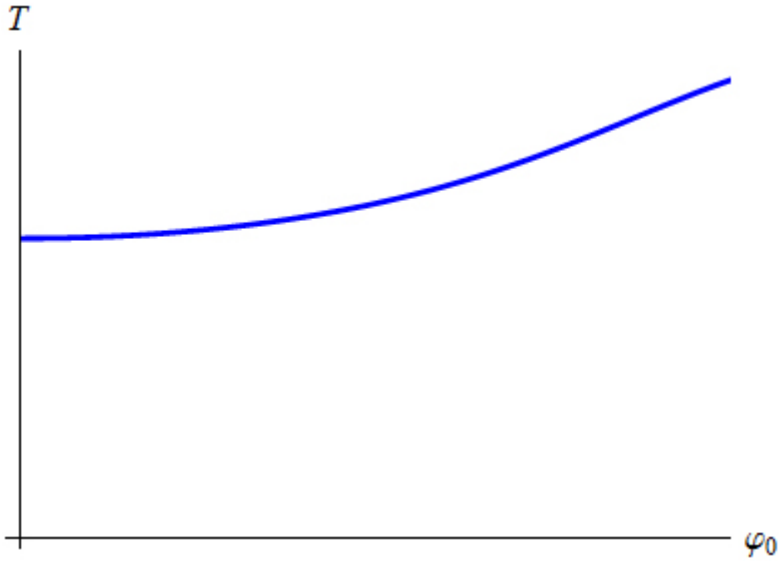
Po dosazení vztahu (64) do vztahu (63) a následně do vztahů (61) a (60) získáme $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\psi\right)^2+\frac{3}{8}\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\psi\right)^4+\frac{15}{48}\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\psi\right)^6+\ldots\right)\mathrm{d}\psi$ a tedy

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}+\frac{9\pi}{128}\sin^4\frac{\varphi_0}{2}+\frac{25\pi}{512}\sin^6\frac{\varphi_0}{2}+\ldots\right). \tag{65}$$

Vytkneme-li ve výrazu (65) $\frac{\pi}{2}$, získáme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}+\frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi_0}{2}+\frac{25}{256}\sin^6\frac{\varphi_0}{2}+\ldots\right). \tag{66}$$

První člen výrazu (66) odpovídá periodě matematického kyvadla pro malé výchylky. Ostatní členy je možné v tomto kontextu chápat jako opravy periody pro konkrétní počáteční výchylku (maximální výchylku) popsanou úhlem φ_0. Graf závislosti periody na počáteční výchylce popsané úhlem φ_0 je na obr. 32. Ačkoliv to tak z grafu na první pohled nevypadá, perioda kmitání matematického kyvadla pro velké počáteční výchylky prudce narůstá.



Obr. 32

© Encyklopedie Fyziky (http://fyzika.jreichl.com); Jaroslav Reichl, Martin Všetička
Licence http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/ zakazuje úpravy a komerční distribuci.