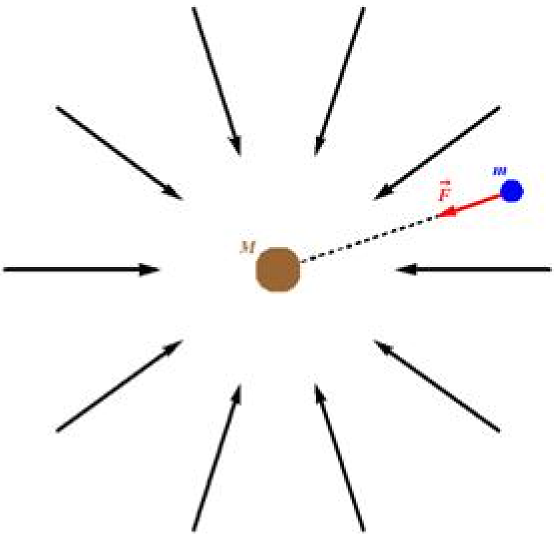
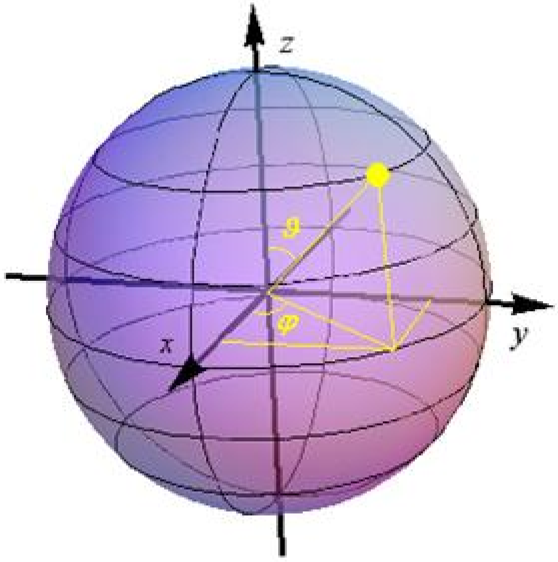
Pohyb hmotného bodu v centrálním silovém poli

V centrálním silovém poli (viz obr. 33) se nachází hmotný bod o hmotnosti m. Vzhledem k tomu, že se jedná o centrální pole, je síla $\vec{F}$, která na hmotný bod působí, centrální síla (radiální síla). Tato síla proto nemá tečnou složku, a popisovaná situace je tedy sféricky symetrická. To znamená, že k popisu systému lze užít sférické souřadnice (viz obr. 34).



Obr. 33



Obr. 34

Zobecněnými souřadnicemi, které budou popisovat náš systém, tedy budou tři sférické souřadnice $q^1 = r$, $q^2 = \vartheta$ a $q^3 = \varphi$, kde je r je poloměr uvažované sféry. Tři plně postačují k popisu, neboť vyšetřujeme pohyb jednoho hmotného bodu v trojrozměrném prostoru a tento pohyb není omezen žádnou vazbou (viz 3.2.3).

Vztahy mezi zobecněnými souřadnicemi a kartézskými souřadnicemi vyplývají z obr. 34:

$x^1 = x = r \sin\vartheta \cos\varphi$;

$x^2 = y = r \sin\vartheta \sin\varphi$;

$x^3 = z = r \cos\vartheta$.

Tyto souřadnice závisí na čase. Nyní určíme jejich první derivace podle času:

$\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} = \dot{x} = \dot{r} \sin\vartheta \cos\varphi + r\dot{\vartheta} \cos\vartheta \cos\varphi - r\dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\varphi$;

$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} = \dot{y} = \dot{r} \sin\vartheta \sin\varphi + r\dot{\vartheta} \cos\vartheta \sin\varphi + r\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\varphi$;

$\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t} = \dot{z} = \dot{r} \cos\vartheta - r\dot{\vartheta} \sin\vartheta$.

Nyní můžeme určit kinetickou energii hmotného bodu, který se nachází v centrálním silovém poli: $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$. Dosazením z přechodních vztahů a následnou úpravou získáme vztah

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta\right), \qquad (72)$$

který popisuje kinetickou energii hmotného bodu ve sférických souřadnicích vždy, bez ohledu na další charakteristiky konkrétní úlohy.

Kinetická energie hmotného bodu vždy musí obsahovat všechny zavedené zobecněné rychlosti $\dot{q}^j$ (pro $j = 1, 2, \dots, n$), ale nemusí obsahovat nutně všechny zobecněné souřadnice q^j. Tyto souřadnice, které nejsou ve vztahu pro kinetickou energii (resp. ve vztahu pro lagrangián) obsaženy, usnadňují další výpočty. Těmto souřadnicím se říká cyklické souřadnice.

Jednotlivé členy, které vystupují v závorce vztahu (72) přitom mají svůj fyzikální význam - jedná o rychlosti, příslušející dané zobecněné souřadnici:

1. člen $v_r = \dot{r}$ určuje velikost radiální rychlosti, tj. rychlosti jakou se těleso o hmotnosti *m* přibližuje (resp. vzdaluje) hmotnému centru;
2. člen $v_\vartheta = r\dot{\vartheta}$ odpovídá velikosti rychlosti ve směru souřadnice ϑ;

Na povrchu Země se jedná o velikost rychlosti, kterou se hmotný bod pohybuje v severojižním směru.

3. člen $v_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\vartheta$ odpovídá velikosti rychlosti ve směru souřadnice φ.

Na povrchu Země se tedy jedná o velikost rychlosti, kterou se hmotný bod pohybuje ve směru východ - západ. $r\sin\vartheta$ je poloměr kružnice, po níž se hmotný bod v tomto směru pohybuje (tj. poloměr dané rovnoběžky, po níž se hmotný bod pohybuje) a $\dot{\varphi}$ je velikost úhlové rychlosti, s jakou se mění úhel φ.

To tedy znamená, že vektory $\vec{v_r}$, $\vec{v_\vartheta}$ a $\vec{v_\varphi}$ definují lokální kartézský systém na sféře.

V právě řešené úloze by bylo možné určit kinetickou energii (resp. celkovou velikost rychlosti hmotného bodu) na základě geometrického rozboru situace. Ale v obecném případě geometrický rozbor nemusí být tak zřejmý a názorný jako v tomto speciálním případě.

Ve vztazích pro velikosti rychlostí ve směru jednotlivých zobecněných souřadnic lze v tomto případě najít tzv. Laméovy koeficienty: 1, *r* a $r\sin\vartheta$.

Jsou to ty koeficienty, kterými se násobí derivace příslušné zobecněné souřadnice.

Každé centrální pole je konzervativní, neboť síla v něm působí radiálně a je závislá pouze na vzdálenosti (ne na funkci vzdálenosti) od hmotného centra daného centrálního silového pole. Proto má toto pole potenciální energii *V*, která je závislá pouze na vzdálenosti hmotného bodu od hmotného centra pole. Podle vztahu (42) je $F_x = -\frac{\partial V}{\partial r}$, $F_y \approx -\frac{\partial V}{\partial \vartheta}$ a $F_z \approx -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$.

Úměra místo operátoru „=“ je ve vztazích pro F_y a F_z proto, že ve výpočtu chybí Laméovy koeficienty.

Vzhledem k tomu, že úlohu vyšetřujeme v centrálním poli, jehož potenciální energie závisí jen na vzdálenosti od hmotného centra, je $\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$. A tedy

$$F(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r). \tag{73}$$

Nyní můžeme psát Lagrangeovu funkci (48) ve tvaru

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\right) - V(r). \tag{74}$$

Pro jednotlivé derivace, které jsou nutné pro sestavení Lagrangeových rovnic druhého druhu, dostaneme:

$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ a $\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\vartheta}^2 + mr\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r)$;

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta}$ a $\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = mr^2\dot{\varphi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$;

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}\sin^2 \vartheta$ a $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$.

Tyto derivace byly určeny za „vypnutého času“ a tedy parametry r, ϑ, φ, $\dot{r}$, $\dot{\vartheta}$ a $\dot{\varphi}$ byly navzájem nezávislé parametry. Nyní čas zapneme a bude platit $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t)$, $\dot{\vartheta} = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}(t)$ a $\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t)$.

Časové derivace derivací lagrangiánu derivovaného již podle zobecněných rychlostí $\dot{r}$, $\dot{\vartheta}$ a $\dot{\varphi}$ jsou:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$;

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = mr^2\ddot{\vartheta} + 2mr\dot{r}\dot{\vartheta}$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\varphi}\sin^2 \vartheta\right)$ - důvod, proč tento výraz zapisujeme jen symbolicky, vyplyne po sepsání Lagrangeových rovnic druhého druhu.

Nyní již můžeme napsat Lagrangeovy rovnice druhého druhu pro uvažovanou situaci. Dosadíme tedy do (47) a získáme:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\vartheta}^2 - mr\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r) = 0\,, \tag{75}$$

$$mr^2\ddot{\vartheta} + 2mr\dot{r}\dot{\vartheta} - mr^2\dot{\varphi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta = 0 \tag{76}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\varphi}\sin^2 \vartheta\right) = 0\,. \tag{77}$$

Z rovnice (77) vyplývá, proč jsme časovou derivaci lagrangiánu derivovaného podle zobecněné rychlosti $\dot{\varphi}$ pouze naznačili. Rovnice (77) zapsaná v této podobě je snadno řešitelná a jejím řešením je

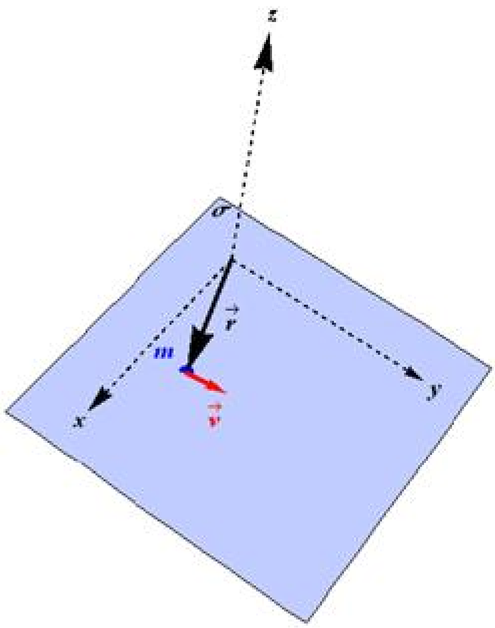
$$mr^2\dot{\varphi}\sin^2 \vartheta = konst. \tag{78}$$

Rovnice (78) je matematickým vyjádřením zákona zachování momentu hybnosti v centrálním silovém poli.

Na základě pozorování lze tvrdit:

POHYB V KAŽDÉM CENTRÁLNÍM POLI JE NUTNĚ POHYB ROVINNÝ.

Pokud se povede toto dokázat, pak lze k popisu pohybu hmotného bodu v centrálním poli použít pouze dvě souřadnice, tj. lze přejít od sférických souřadnic k polárním souřadnicím.



Obr. 35

Zvolme bez újmy na obecnosti počáteční podmínky pohybu tak, že $\vartheta(t_0) = \frac{\pi}{2}$ a $\dot{\vartheta}(t_0) = 0$. Polohový vektor $\vec{r}$ a vektor počáteční rychlosti $\vec{v_0}$ pohybu hmotného bodu jsou kolineární a určují tedy rovinu σ. (Pokud by kolineární nebyly, vybrali bychom jednu z rovin, v níž oba leží). Kartézskou soustavu souřadnic lze volit libovolně - proto (bez újmy na obecnosti) ji zvolíme tak, že osy *x* a *y* leží v rovině σ a osa *z* je k této rovině kolmá (viz obr. 35). Tedy tak, že $\vartheta(t_0) = \frac{\pi}{2}$.

Nyní je zřejmý význam veličiny $\dot{\vartheta}(t)$ - určuje velikost rychlosti nárůstu odchylky pohybujícího se hmotného bodu od roviny σ. Jestliže jsme zvolili $\dot{\vartheta}(t_0) = 0$ pak to znamená, že v čase t_0 zůstává hmotný bod v rovině σ.

Přepsáním rovnice (76) v čase t_0 získáme $mr^2\ddot{\vartheta} + 2mr\dot{r}.0 - mr^2\dot{\varphi}^2 \sin\vartheta \cos\frac{\pi}{2} = 0$, tedy $mr^2\ddot{\vartheta} = 0$. Dostáváme tak $\ddot{\vartheta} = 0$, což znamená, že velikost zrychlení hmotného bodu ve směru mimo rovinu σ je nulové. Hmotný bod tedy zůstává v rovině σ, což je tzv. rovina ekliptiky.

Tedy $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ v každém časovém okamžiku.

Řešením rovnice (77), jak bylo již uvedeno, je vztah (78), který představuje zákon zachování momentu hybnosti. Jestliže se ale moment hybnosti zachovává (tj. nemění se ani jeho velikost, ani jeho směr), pak je pohyb hmotného bodu nutně rovinný. A navíc směr momentu hybnosti je kolmý k rovině, v níž se hmotný bod pohybuje.

Proto lze místo sférických souřadnic *r*, ϑ, φ použít polární souřadnice *r*, φ, čímž získáme Lagrangeovu funkci (74) ve tvaru

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r), \tag{79}$$

kde $\dot{r}$ představuje velikost radiální rychlosti (tj. velikost rychlosti vzdalování od hmotného centra centrální pole) a $r\dot{\varphi}$ je velikost tečné rychlosti, tj. velikost rychlosti pohybu hmotného bodu po křivce v rovině.

Je důležité si uvědomit, že přechod z třírozměrného popisu systému do dvourozměrného popisu systému, tj. přechod od lagrangiánu ve tvaru (74) k lagrangiánu ve tvaru (79) není obecně triviální a je jistější přepočítat celou úlohu (kinetickou energii, potenciální energii, ...) znovu. V námi vyšetřované úloze to bylo možné, protože jsme používali kartézské souřadnice a z geometrického náhledu byla situace jasná.
