

## Metody řešení Lagrangeových rovnic

[Lagrangeovy rovnice druhého druhu](#) (41) resp. (47) jsou obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, které je možno řešit různými způsoby:

1. numericky pomocí počítače - výpočet je ale nutné pečlivě kontrolovat, abychom získali skutečně správná řešení rovnic i z fyzikálního hlediska;
2. použitím zjednodušujících aproximací (většinou linearizace problému a tedy i řešených rovnic) - nutno provádět pouze za určitých předpokladů a fyzikálně korektně (např. řešení pohybových rovnic [matematického kyvadla](#));
3. exaktní řešení pomocí tzv. **prvních integrálů (integrálů pohybu)**.

Lagrangeovy rovnice často samy dávají návod, jak je řešit. Pokud zavedeme integrály pohybu, zjednodušíme si řešení rovnic.

Každý integrál pohybu se totiž pomůže zbavit jedné tečky v derivaci funkce.

**INTEGRÁL POHYBU JE VÝRAZ TVARU**

$$f(q^j, \dot{q}^j, t) = \text{konst.}, \quad (80)$$

**KTERÝ V KAŽDÉM OKAMŽIKU NABÝVÁ STEJNÉ HODNOTY (KONSTANTNÍ HODNOTY), KDYŽ HO VYČÍSLÍME PODÉL LIBOVOLNÉ [TRAJEKTORIE](#) POPSANÉ ROVNICÍ  $q^j = q^j(t)$  (PRO  $j = 1, 2, \dots, n$ ), KTERÁ ŘEŠÍ POHYBOVÉ ROVNICE.**

Do vztahu (80) tedy dosadíme skutečné funkce  $q^j = q^j(t)$  a  $\dot{q}^j = \dot{q}^j(t)$  a hodnota tohoto výrazu pak bude tedy pořád stejná, tj.  $f(q^j(t), \dot{q}^j(t), t) = \text{konst.}$  Jinými slovy  $\frac{df}{dt}(t) = 0$  platí pro každou trajektorii, která je dána svými počátečními podmínkami.

Podél jiné trajektorie bude výraz (80) nabývat také konstantní hodnoty, ale bude to jiná konstanta, než u předešlé trajektorie.

Před dalším tvrzením, které usnadní výpočty Lagrangeových rovnic druhého druhu, zavedeme pojem **cyklická souřadnice**.

**ZOBECNĚNÁ SOUŘADNICE, NA KTERÉ NEZÁVISÍ [LAGRANGEOVA FUNKCE](#) (48), SE NAZÝVÁ CYKlickÁ SOUŘADNICE.**

A nyní již uvedeme zmiňované tvrzení.

**POKUD LAGRANGEOVA FUNKCE (48) NEZÁVISÍ NA NĚKTERÉ ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICI  $q^i$ , PAK VÝRAZ  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$  JE INTEGRÁLEM POHYBU.**

Důkaz tohoto tvrzení je snadný: z  $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$  Lagrangeových rovnic druhého druhu vezmeme  $i$ -tou rovnici  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$ . Podle předpokladu tvrzení nezávisí Lagrangeova funkce na

[souřadnici](#)  $q^i$ , tedy  $\frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$ . Po dosazení do  $i$ -té Lagrangeovy rovnice získáme  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0$  a tedy

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \text{konst.}$  Proto  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = f$ , kde  $f$  je integrál pohybu (80).

Příklad: Určete integrály pohybu v langrangiánu  $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(z)$ .

Řešení: [Lagrangián](#) závisí v tomto případě na kartézských souřadnicích  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Ovšem na  $x$  a na  $y$  nezávisí explicitně (závisí na časových derivacích těchto souřadnic). Proto jsou souřadnice  $x$  a  $y$

cyklické souřadnice a tedy máme dva integrály pohybu:  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$  a  $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$ , pro které platí  $\frac{\partial L}{\partial x} = m\dot{x} = \text{konst.}$  a

$\frac{\partial L}{\partial y} = m\dot{y} = konst.$ . Tedy x-ová a y-ová složka [hybnosti](#) se zachovává.

Dalším integrálem pohybu je tzv. **zobecněná energie**.

**POKUD LAGRANGEOVA FUNKCE (48) NEZÁVISÍ EXPLICITNĚ NA ČASE  $t$ , PAK VÝRAZ**

$$h(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L, \quad (81)$$

**KTERÝ SE NAZÝVÁ ZOBECNĚNÁ ENERGIE (JACOBIHO INTEGRÁL), JE INTEGRÁLEM POHYBU.**

Má-li být výraz (81) integrálem pohybu, pak podle podmínky (80) musí platit  $h(q, \dot{q}, t) = konst.$ . Tuto rovnost nyní dokážeme. Pokud má být  $h(q, \dot{q}, t) = konst.$ , musí být

$\frac{dh}{dt} = 0$ . Proto nyní určíme úplnou časovou derivaci (81). Získáme:

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j \right) - \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial t} \right), \quad \text{kde } \frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial t} \right).$$

Po úpravě získáme  $\frac{dh}{dt} = \sum_{j=1}^n \left( \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \dot{q}^j \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$ . Uvědomíme-li si, že platí  $\sum_{j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \dot{q}^j = 0$  (jedná se

o Lagrangeovy rovnice druhého druhu (viz (47)) a že  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  (podle předpokladu definice zobecněné

energie (81)), pak  $\frac{dh}{dt} = 0$ .

**Příklad:** Určete integrály pohybu v langrangiánu  $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$ .

**Řešení:** Vzhledem k tomu, že napsaný lagrangián nezávisí explicitně na čase, můžeme definovat zobecněnou energii pomocí vztahu (81):  $h = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} - L$ . Po dosazení a po postupných

úpravách dostaneme:  $h = m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) = T + V$ .

V tomto **SPECIÁLNÍM PŘÍPADĚ** jsme tedy získali  $h = T + V = konst.$ , tj. [zákon zachování mechanické energie](#). Obecně ovšem zobecněná energie nemusí být vyjádřením [zákona zachování energie](#).

V tomto případě je to důsledek speciální podoby langrangiánu.

Přesto je zobecněná energie  $h$  v některých případech rovna celkové [mechanické energii](#) systému.

**ZOBECNĚNÁ ENERGIE DEFINOVANÁ VZTAHEM (81) JE ZÁKONEM ZACHOVÁNÍ MECHANICKÉ ENERGIE TEHDY, KDYŽ SE JEDNÁ O POHYB HMOTNÉHO BODU V POLI KONZERVATIVNÍCH SIL, KTERÉ JSOU OMEZENY HOLONOMNÍMI A SKLERONOMNÍMI VAZBAMI.**

[Reonomní vazby](#) totiž [energii](#) systému dodávají nebo odebírají.

Důkaz tohoto tvrzení provedeme rozpisem [kinetické energie](#)  $T$  a následným dosazením do vztahu (81).

Pro kinetickou energii soustavy  $N$  hmotných bodů platí:  $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left( \frac{dx^i}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt}$ .

Vzhledem k tomu, že  $x^i = x^i(q^j(t))$  (podle podmínky (31)) pro  $i = 1, 2, \dots, 3N$  a  $j = 1, 2, \dots, n$  ( $n$  je [počet](#)

stupňů volnosti), můžeme psát  $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \sum_{r=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \dot{q}^r \sum_{s=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^s} \dot{q}^s$ . Po úpravách, při kterých zaměníme také pořadí sčítanců, dostaneme  $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \dot{q}^r \frac{\partial x^i}{\partial q^s} \dot{q}^s = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \frac{\partial x^i}{\partial q^s} \dot{q}^r \dot{q}^s$ . Označíme-li

$A_{rs} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \frac{\partial x^i}{\partial q^s}$ , můžeme pro kinetickou energii můžeme psát:  $T = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n A_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s$ . Nyní už lze na

základě vztahu (81) psát zobecněnou energii:  $h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - T + V$ .

V poslední sumě se derivuje pouze kinetická energie  $T$ , protože potenciální energie  $V$  nezávisí na žádné zobecněné rychlosti  $\dot{q}^j$ .

Dosažením z rozepsané kinetické energie získáme:

$$h = \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left( A_{rs} \frac{\partial \dot{q}^r}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^s + A_{rs} \dot{q}^r \frac{\partial \dot{q}^s}{\partial \dot{q}^j} \right) \dot{q}^j - T + V = \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left( A_{rs} \delta_j^r \dot{q}^s + A_{rs} \dot{q}^r \delta_j^s \right) \dot{q}^j - T + V =$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left( A_{rs} \delta_j^r \dot{q}^j \dot{q}^s + A_{rs} \dot{q}^r \delta_j^s \dot{q}^j \right) - T + V = \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left( A_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s + A_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s \right) - T + V$$

S využitím zavedené kinetické energie lze tedy psát:  $h = T + T - T + V = T + V = E = konst.$

Tím je důkaz ukončen.