

Metody řešení Lagrangeových rovnic

[Lagrangeovy rovnice druhého druhu](#) (41) resp. (47) jsou obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, které je možno řešit různými způsoby:

1. numericky pomocí počítače - výpočet je ale nutné pečlivě kontrolovat, abychom získali skutečně správná řešení rovnic i z fyzikálního hlediska;
2. použitím zjednodušujících aproximací (většinou linearizace problému a tedy i řešených rovnic) - nutno provádět pouze za určitých předpokladů a fyzikálně korektně (např. řešení pohybových rovnic [matematického kyvadla](#));
3. exaktní řešení pomocí tzv. **prvních integrálů (integrálů pohybu)**.

Lagrangeovy rovnice často samy dávají návod, jak je řešit. Pokud zavedeme integrály pohybu, zjednodušíme si řešení rovnic.

Každý integrál pohybu se totiž pomůže zbavit jedné tečky v derivaci funkce.

INTEGRÁL POHYBU JE VÝRAZ TVARU

$$f(q^j, \dot{q}^j, t) = \text{konst.}, \quad (80)$$

KTERÝ V KAŽDÉM OKAMŽIKU NABÝVÁ STEJNÉ HODNOTY (KONSTANTNÍ HODNOTY), KDYŽ HO VYČÍSLÍME PODÉL LIBOVOLNÉ [TRAJEKTORIE](#) POPSANÉ ROVNICÍ $q^j = q^j(t)$ (PRO $j = 1, 2, \dots, n$), KTERÁ ŘEŠÍ POHYBOVÉ ROVNICE.

Do vztahu (80) tedy dosadíme skutečné funkce $q^j = q^j(t)$ a $\dot{q}^j = \dot{q}^j(t)$ a hodnota tohoto výrazu pak bude tedy pořád stejná, tj. $f(q^j(t), \dot{q}^j(t), t) = \text{konst.}$ Jinými slovy $\frac{df}{dt}(t) = 0$ platí pro každou trajektorii, která je dána svými počátečními podmínkami.

Podél jiné trajektorie bude výraz (80) nabývat také konstantní hodnoty, ale bude to jiná konstanta, než u předešlé trajektorie.

Před dalším tvrzením, které usnadní výpočty Lagrangeových rovnic druhého druhu, zavedeme pojem **cyklická souřadnice**.

ZOBECNĚNÁ SOUŘADNICE, NA KTERÉ NEZÁVISÍ [LAGRANGEOVA FUNKCE](#) (48), SE NAZÝVÁ CYKICKÁ SOUŘADNICE.

A nyní již uvedeme zmiňované tvrzení.

POKUD LAGRANGEOVA FUNKCE (48) NEZÁVISÍ NA NĚKTERÉ ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICI q^i , PAK VÝRAZ $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ JE INTEGRÁLEM POHYBU.

Důkaz tohoto tvrzení je snadný: z $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ Lagrangeových rovnic druhého druhu vezmeme i -tou rovnici $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$. Podle předpokladu tvrzení nezávisí Lagrangeova funkce na

[souřadnici](#) q^i , tedy $\frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$. Po dosazení do i -té Lagrangeovy rovnice získáme $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0$ a tedy

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \text{konst.}$ Proto $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = f$, kde f je integrál pohybu (80).

Příklad: Určete integrály pohybu v langrangiánu $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(z)$.

Řešení: [Lagrangián](#) závisí v tomto případě na kartézských souřadnicích x , y a z . Ovšem na x a na y nezávisí explicitně (závisí na časových derivacích těchto souřadnic). Proto jsou souřadnice x a y

cyklické souřadnice a tedy máme dva integrály pohybu: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ a $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$, pro které platí $\frac{\partial L}{\partial x} = m\dot{x} = \text{konst.}$ a

$\frac{\partial L}{\partial y} = m\dot{y} = konst.$. Tedy x-ová a y-ová složka [hybnosti](#) se zachovává.

Dalším integrálem pohybu je tzv. **zobecněná energie**.

POKUD LAGRANGEOVA FUNKCE (48) NEZÁVISÍ EXPLICITNĚ NA ČASE t , PAK VÝRAZ

$$h(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L, \quad (81)$$

KTERÝ SE NAZÝVÁ ZOBECNĚNÁ ENERGIE (JACOBIHO INTEGRÁL), JE INTEGRÁLEM POHYBU.

Má-li být výraz (81) integrálem pohybu, pak podle podmínky (80) musí platit $h(q, \dot{q}, t) = konst.$. Tuto rovnost nyní dokážeme. Pokud má být $h(q, \dot{q}, t) = konst.$, musí být

$\frac{dh}{dt} = 0$. Proto nyní určíme úplnou časovou derivaci (81). Získáme:

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial q^j} \dot{q}^j \right) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial t} \right), \quad \text{kde } \frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial t} \right).$$

Po úpravě získáme $\frac{dh}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} \right) \dot{q}^j \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$. Uvědomíme-li si, že platí $\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} \right) \dot{q}^j = 0$ (jedná se

o Lagrangeovy rovnice druhého druhu (viz (47)) a že $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ (podle předpokladu definice zobecněné

energie (81)), pak $\frac{dh}{dt} = 0$.

Příklad: Určete integrály pohybu v langrangiánu $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$.

Řešení: Vzhledem k tomu, že napsaný lagrangián nezávisí explicitně na čase, můžeme definovat zobecněnou energii pomocí vztahu (81): $h = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} - L$. Po dosazení a po postupných

úpravách dostaneme: $h = m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) = T + V$.

V tomto **SPECIÁLNÍM PŘÍPADĚ** jsme tedy získali $h = T + V = konst.$, tj. [zákon zachování mechanické energie](#). Obecně ovšem zobecněná energie nemusí být vyjádřením [zákona zachování energie](#).

V tomto případě je to důsledek speciální podoby lagrangiánu.

Přesto je zobecněná energie h v některých případech rovna celkové [mechanické energii](#) systému.

ZOBECNĚNÁ ENERGIE DEFINOVANÁ VZTAHEM (81) JE ZÁKONEM ZACHOVÁNÍ MECHANICKÉ ENERGIE TEHDY, KDYŽ SE JEDNÁ O POHYB HMOTNÉHO BODU V POLI KONZERVATIVNÍCH SIL, KTERÉ JSOU OMEZENY HOLONOMNÍMI A SKLERONOMNÍMI VAZBAMI.

[Reonomní vazby](#) totiž [energii](#) systému dodávají nebo odebírají.

Důkaz tohoto tvrzení provedeme rozpisem [kinetické energie](#) T a následným dosazením do vztahu (81).

Pro kinetickou energii soustavy N hmotných bodů platí: $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt}$.

Vzhledem k tomu, že $x^i = x^i(q^j(t))$ (podle podmínky (31)) pro $i = 1, 2, \dots, 3N$ a $j = 1, 2, \dots, n$ (n je [počet](#)

stupňů volnosti), můžeme psát $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \sum_{r=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \dot{q}^r \sum_{s=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^s} \dot{q}^s$. Po úpravách, při kterých zaměníme také pořadí sčítanců, dostaneme $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \dot{q}^r \frac{\partial x^i}{\partial q^s} \dot{q}^s = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \frac{\partial x^i}{\partial q^s} \dot{q}^r \dot{q}^s$. Označíme-li

$A_{rs} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \frac{\partial x^i}{\partial q^s}$, můžeme pro kinetickou energii můžeme psát: $T = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n A_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s$. Nyní už lze na

základě vztahu (81) psát zobecněnou energii: $h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - T + V$.

V poslední sumě se derivuje pouze kinetická energie T , protože potenciální energie V nezávisí na žádné zobecněné rychlosti \dot{q}^j .

Dosažením z rozepsané kinetické energie získáme:

$$h = \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left(A_{rs} \frac{\partial \dot{q}^r}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^s + A_{rs} \dot{q}^r \frac{\partial \dot{q}^s}{\partial \dot{q}^j} \right) \dot{q}^j - T + V = \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left(A_{rs} \delta_j^r \dot{q}^s + A_{rs} \dot{q}^r \delta_j^s \right) \dot{q}^j - T + V =$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left(A_{rs} \delta_j^r \dot{q}^j \dot{q}^s + A_{rs} \dot{q}^r \delta_j^s \dot{q}^j \right) - T + V = \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left(A_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s + A_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s \right) - T + V$$

S využitím zavedené kinetické energie lze tedy psát: $h = T + T - T + V = T + V = E = konst.$

Tím je důkaz ukončen.