Metody řešení Lagrangeových rovnic

Lagrangeovy rovnice druhého druhu (41) resp. (47) jsou obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, které je možno řešit různými způsoby:

1. numericky pomocí počítače - výpočet je ale nutné pečlivě kontrolovat, abychom získali skutečně správná řešení rovnic i z fyzikálního hlediska;
2. použitím zjednodušujících aproximací (většinou linearizace problému a tedy i řešených rovnic) - nutno provádět pouze za určitých předpokladů a fyzikálně korektně (např. řešení pohybových rovnic matematického kyvadla);
3. exaktní řešení pomocí tzv. **prvních integrálů** (**integrálů pohybu**).

Lagrangeovy rovnice často samy dávají návod, jak je řešit. Pokud zavedeme integrály pohybu, zjednodušíme si řešení rovnic.

Každý integrál pohybu se totiž pomůže zbavit jedné tečky v derivaci funkce.

INTEGRÁL POHYBU JE VÝRAZ TVARU

$$f\left(q^j, \dot{q}^j, t\right) = konst., \tag{80}$$

KTERÝ V KAŽDÉM OKAMŽIKU NABÝVÁ STEJNÉ HODNOTY (KONSTANTNÍ HODNOTY), KDYŽ HO VYČÍSLÍME PODÉL LIBOVOLNÉ TRAJEKTORIE POPSANÉ ROVNICÍ $q^j = q^j(t)$ (PRO $j = 1, 2, \ldots, n$), KTERÁ ŘEŠÍ POHYBOVÉ ROVNICE.

Do vztahu (80) tedy dosadíme skutečné funkce $q^j = q^j(t)$ a $\dot{q}^j = \dot{q}^j(t)$ a hodnota tohoto výrazu pak bude tedy pořád stejná, tj. $f\left(q^j(t), \dot{q}^j(t), t\right) = konst.$ Jinými slovy $\frac{df}{dt}(t) = 0$ platí pro každou trajektorii, která je dána svými počátečnými podmínkami.

Podél jiné trajektorie bude výraz (80) nabývat také konstantní hodnoty, ale bude to jiná konstanta, než u předešlé trajektorie.

Před dalším tvrzením, které usnadní výpočty Lagrangeových rovnic druhého druhu, zavedeme pojem **cyklická souřadnice**.

ZOBECNĚNÁ SOUŘADNICE, NA KTERÉ NEZÁVISÍ LAGRANGEOVA FUNKCE (48), SE NAZÝVÁ CYKLICKÁ SOUŘADNICE.

A nyní již uvedeme zmiňované tvrzení.

POKUD LAGRANGEOVA FUNKCE (48) NEZÁVISÍ NA NĚKTERÉ ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICI q^i, PAK VÝRAZ $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ JE INTEGRÁLEM POHYBU.

Důkaz tohoto tvrzení je snadný: z $j = 1, 2, \ldots, i-1, i, i+1, \ldots, n$ Lagrangeových rovnic druhého druhu vezmeme *i*-tou rovnici $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$. Podle předpokladu tvrzení nezávisí Lagrangeova funkce na souřadnici q^i, tedy $\frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$. Po dosazení do *i*-té Lagrangeovy rovnice získáme $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0$ a tedy $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = konst.$ Proto $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = f$, kde *f* je integrál pohybu (80).

Příklad: Určete integrály pohybu v langrangiánu $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(z)$.

Řešení: Lagrangián závisí v tomto případě na kartézských souřadnicích *x*, *y* a *z*. Ovšem na *x* a na *y* nezávisí explicitně (závisí na časových derivacích těchto souřadnic). Proto jsou souřadnice *x* a *y* cyklické souřadnice a tedy máme dva integrály pohybu: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ a $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$, pro které platí $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = konst.$ a

$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = konst.$ Tedy *x*-ová a *y*-ová složka hybnosti se zachovává.

Dalším integrálem pohybu je tzv. **zobecněná energie**.

POKUD LAGRANGEOVA FUNKCE (48) NEZÁVISÍ EXPLICITNĚ NA ČASE t, PAK VÝRAZ

$$h(q,\dot{q},t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\dot{q}^j - L, \qquad (81)$$

KTERÝ SE NAZÝVÁ ZOBECNĚNÁ ENERGIE (JACOBIHO INTEGRÁL), JE INTEGRÁLEM POHYBU.

Má-li být výraz (81) integrálem pohybu, pak podle podmínky (80) musí platit $h(q,\dot{q},t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\dot{q}^j - L = konst.$ Tuto rovnost nyní dokážeme. Pokud má být $h(q,\dot{q},t) = konst.$, musí být $\frac{dh}{dt} = 0$. Proto nyní určíme úplnou časovou derivaci (81). Získáme: $\frac{dh}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right)\dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j\right) - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\partial\dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial t}\right)$, kde $\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\partial\dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial t}\right)$. Po úpravě získáme $\frac{dh}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^j}\right)\dot{q}^j\right) - \frac{\partial L}{\partial t}$. Uvědomíme-li si, že platí $\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^j}\right) = 0$ (jedná se o Lagrangeovy rovnice druhého druhu (viz (47)) a že $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ (podle předpokladu definice zobecněné energie (81)), pak $\frac{dh}{dt} = 0$.

Příklad: Určete integrály pohybu v langrangiánu $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(x,y,z)$.

Řešení: Vzhledem k tomu, že napsaný lagrangián nezávisí explicitně na čase, můžeme definovat zobecněnou energii pomocí vztahu (81): $h = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\dot{z} - L$. Po dosazení a po postupných úpravách dostaneme: $h = m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + V(x,y,z) = T + V$.
V tomto **SPECIÁLNÍM PŘÍPADĚ** jsme tedy získali $h = T + V = konst.$, tj. zákon zachování mechanické energie. Obecně ovšem zobecněná energie nemusí být vyjádřením zákona zachování energie. V tomto případě je to důsledek speciální podoby lagrangiánu.

Přesto je zobecněná energie *h* v některých případech rovna celkové mechanické energii systému.

ZOBECNĚNÁ ENERGIE DEFINOVANÁ VZTAHEM (81) JE ZÁKONEM ZACHOVÁNÍ MECHANICKÉ ENERGIE TEHDY, KDYŽ SE JEDNÁ O POHYB HMOTNÉHO BODU V POLI KONZERVATIVNÍCH SIL, KTERÉ JSOU OMEZENY HOLONOMNÍMI A SKLERONOMNÍMI VAZBAMI.

Reonomní vazby totiž energii systému dodávají nebo odebírají.

Důkaz tohoto tvrzení provedeme rozpisem kinetické energie *T* a následným dosazením do vztahu (81).

Pro kinetickou energii soustavy *N* hmotných bodů platí: $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^i}{dt}$. Vzhledem k tomu, že $x^i = x^i\left(q^j(t)\right)$ (podle podmínky (31)) pro $i = 1, 2, \ldots, 3N$ a $j = 1, 2, \ldots, n$ (*n* je počet stupňů volnosti), můžeme psát $T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \sum_{r=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial q^r}\dot{q}^r \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial q^s}\dot{q}^s$. Po úpravách, při kterých zaměníme také pořadí sčítanců, dostaneme $T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial q^r}\dot{q}^r \frac{\partial x^i}{\partial q^s}\dot{q}^s = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{3N}\frac{1}{2}m_i \frac{\partial x^i}{\partial q^r}\frac{\partial x^i}{\partial q^s}\dot{q}^s\dot{q}^r$. Označíme-li $A_{rs}=\sum_{i=1}^{3N}\frac{1}{2}m_i\frac{\partial x^i}{\partial q^r}\frac{\partial x^i}{\partial q^s}$, můžeme pro kinetickou energii můžeme psát: $T=\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}A_{rs}\dot{q}^s\dot{q}^r$. Nyní už lze na základě vztahu (81) psát zobecněnou energii: $h=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\dot{q}^j - L = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}\dot{q}^j - T + V$.

V poslední sumě se derivuje pouze kinetická energie *T*, protože potenciální energie *V* nezávisí na žádné zobecněné rychlosti $\dot{q}^j$.

Dosazením z rozepsané kinetické energie získáme:

$$h=\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left(A_{rs}\frac{\partial \dot{q}^r}{\partial \dot{q}^j}\dot{q}^s + A_{rs}\dot{q}^r\frac{\partial \dot{q}^s}{\partial \dot{q}^j}\right)\dot{q}^j - T + V = \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left(A_{rs}\delta_j^r\dot{q}^s + A_{rs}\dot{q}^r\delta_j^s\right)\dot{q}^j - T + V =$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left(A_{rs}\delta_j^r\dot{q}^j\dot{q}^s + A_{rs}\dot{q}^r\delta_j^s\dot{q}^j\right) - T + V = \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left(A_{rs}\dot{q}^r\dot{q}^s + A_{rs}\dot{q}^r\dot{q}^s\right) - T + V$$

. S využitím zavedené kinetické energie lze tedy psát: $h=T+T-T+V=T+V=E=konst.$

Tím je důkaz ukončen.