

Pohyb hmotného objektu v poli centrální síly

Jak bylo ukázáno, [pohyb hmotného bodu](#) v [poli centrální síly](#) je pohyb rovinný. To znamená, že pohyb hmotného bodu (resp. hmotného objektu) o hmotnosti m v tomto poli můžeme popsat pomocí polárních [souřadnic](#) r a φ . [Lagrangián](#) tedy lze psát ve tvaru (79), tj. $L = \frac{1}{2}m\{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\} - V(r)$. [Lagrangeova funkce](#) ovšem nezávisí na souřadnici φ - tj. φ je [cyklická souřadnice](#). Můžeme tedy psát první [integrál pohybu](#) ve tvaru

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = l = \text{konst.}, \quad (82)$$

kde l je moment [hybnosti](#). Vztah (82) tedy vyjadřuje [zákon](#) zachování momentu hybnosti.

Lagrangián (79) nezávisí ovšem přímo ani na čase, a proto můžeme psát [zobecněnou energii](#) h pro pohyb hmotného objektu v poli centrální síly ve tvaru

$$h = \frac{1}{2}m\{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\} + V(r) = E = \text{konst.}, \quad (83)$$

neboť se nacházíme v poli [konzervativních sil](#). Ze vztahu (82) můžeme vyjádřit

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}, \quad (84)$$

čímž jsme získali vyjádření časové změny úhlu v závislosti na vzdálenosti od centrálního tělesa a na hmotnosti uvažovaného hmotného objektu.

Získali jsme tedy velikost [úhlové rychlosti](#) pohybu daného objektu, tj. [velikost rychlosti](#), s níž se tento objekt pohybuje kolem centrálního tělesa. V této [rychlosti](#) není zahrnut radiální pohyb (tj. přibližování nebo oddalování od centrálního tělesa)!

Dosažením vztahu (84) do rovnice (83) získáme rovnici $\frac{1}{2}m\left\{\dot{r}^2 + r^2\frac{l^2}{m^2r^4}\right\} + V(r) = E$, odkud můžeme vyjádřit \dot{r}^2 ve tvaru $\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left\{E - V(r)\right\} - \frac{l^2}{m^2r^2}$, který lze upravit na tvar

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left\{E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right\}. \quad (85)$$

S tímto vztahem nyní budeme pracovat dále, neboť naším cílem je popsat pohyb, tj. nalézt závislost souřadnice r (resp. φ) na čase. Proto vztah (85) odmocníme a přepíšeme do tvaru vhodného pro další výpočet $\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left\{E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right\}}$. Pomocí separace proměnných bychom

získali rovnici $dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left\{E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right\}}}$, kterou by bylo možné řešit integrací a získali bychom

$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left\{E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)\right\}}} = g(r)$ a tedy $r = g^{-1}(t)$. Výpočet funkce $g(r)$ je ovšem technicky velmi

zdlouhavý. Proto je lepší nevyšetřovat závislosti $r(t)$ (resp. $\varphi(t)$), ale najít rovnou tvar [trajektorie](#), tj. hledat závislost $r(\varphi)$.

Pro snadnější výpočet zavedeme funkci u proměnné φ předpisem

$$u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}. \quad (86)$$

Potom můžeme psát $r = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u(\varphi)} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u(\varphi(t))} \right) = -\frac{1}{u^2(\varphi(t))} \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi}$. Po dosazení ze vztahu (84) dostaneme $r = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \frac{l}{mr^2} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \frac{lu^2}{m} = -\frac{l}{m} \frac{du}{d\varphi}$ a dosadíme do (85). S využitím (86) tedy získáme $\frac{l^2}{m^2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2}{m} \left(E - \left(V(u) + \frac{l^2 u^2}{2m} \right) \right)$ a odtud již snadnou úpravou získáme

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 = \frac{2m}{l^2} (E - V(u)). \quad (87)$$

Derivací obou stran rovnice (87) podle proměnné φ získáme $2 \frac{du}{d\varphi} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + 2u \frac{du}{d\varphi} = -\frac{2m}{l^2} \frac{dV(u)}{du} \frac{du}{d\varphi}$.

Bez újmy na obecnosti lze tuto rovnici vydělit výrazem $2 \frac{du}{d\varphi}$, čímž získáme vztah

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{dV(u)}{du}, \quad (88)$$

což je tzv. **Binetův vzorec** pro trajektorie pohybujících se objektů v poli centrální síly.

S využitím dvou „triků“ (substituce (86) a derivace rovnice (87)) jsme získali důležitý vztah (88), který má význam nejen v (teoretické) [mechanice](#), ale také např. i v [atomové fyzice](#) (tzv. [Rutherfordův rozptyl](#)).