

## Obecné odvození

**Potenciální energie** tělesa (např. [planeta](#)) o hmotnosti  $m$ , které se pohybuje kolem centrálního tělesa (např. [Slunce](#)) o hmotnosti  $M$  ve vzdálenosti  $r$ , je dána vztahem

$$V = -\frac{GMm}{r} = -\frac{\alpha}{r}, \quad (89)$$

kde  $G$  je gravitační konstanta.

Tvar [trajektorie](#) tělesa, které se pohybuje v [poli](#) centrální [síly](#), získáme pomocí [Binetova vzorce](#) (88). S využitím substituce (86) můžeme psát  $V = -\alpha u$  a tedy  $\frac{dV}{du} = -\alpha$ . Dosazením do (88) získáme rovnici pro neznámou  $u(t)$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\alpha m}{l^2}, \quad (90)$$

kteřá má řešení ve tvaru  $u = u_0 + u_p = C \cos\varphi + \frac{\alpha m}{l^2}$ . S využitím substituce (86) tedy dostáváme

$$r = \frac{1}{C \cos\varphi + \frac{\alpha m}{l^2}} = \frac{\frac{l^2}{\alpha m}}{\frac{l^2 C}{\alpha m} \cos\varphi + 1}, \text{ což můžeme zapsat v zjednodušeném tvaru}$$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}, \quad (91)$$

kde

$$p = \frac{l^2}{\alpha m} = \frac{l^2}{GMm^2}. \quad (92)$$

Je důležité si uvědomit, že  $r$ ,  $u$  a  $\varphi$  jsou funkce závislé na čase.

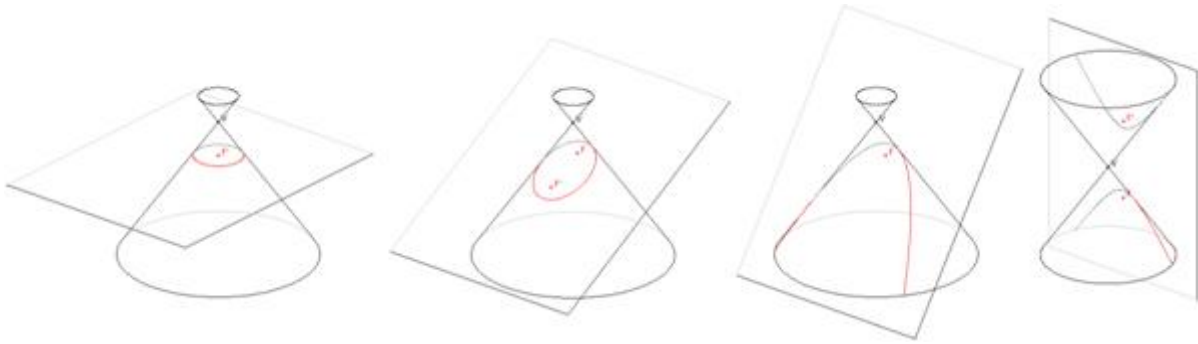
Konstantu  $\varepsilon$  určíme tak, že dosadíme řešení (91) s využitím substituce (86) do rovnice (87). Předtím vyjádříme  $u = \frac{1 + \varepsilon \cos\varphi}{p}$  a  $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon \sin\varphi}{p}$ . Po dosazení do (87) dostaneme

$$\frac{\varepsilon^2 \sin^2\varphi}{p^2} + \frac{1 + 2\varepsilon \cos\varphi + \varepsilon^2 \cos^2\varphi}{p^2} = \frac{2m}{l^2} \left( E + \alpha \frac{1 + \varepsilon \cos\varphi}{p} \right). \quad \text{Dále můžeme psát}$$

$$\varepsilon^2 + 1 + 2\varepsilon \cos\varphi = \frac{2mp^2}{l^2} E + \frac{2m\alpha p}{l^2} (1 + \varepsilon \cos\varphi) \text{ a s využitím vztahu (92) upravit na tvar}$$

$$\varepsilon^2 - 1 + 2(1 + \varepsilon \cos\varphi) = \frac{2mp^2}{l^2} E + 2(1 + \varepsilon \cos\varphi), \text{ odkud}$$

$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{2mp^2}{l^2} E = \frac{2l^2}{\alpha^2 m} E = \frac{2l^2}{G^2 M^2 m^3} E. \quad (93)$$



Obr. 36

Rovnice (91) spolu s podmínkami (92) a (93) vyjadřuje rovnici kuželosečky v polárních souřadnicích. Parametr  $p$  přitom určuje velikost kuželosečky, zatímco parametr  $\varepsilon$ , který se nazývá **numerická excentricita**, určuje celkovou **mechanickou energii** tělesa, která se díky platnosti **zákona zachování mechanické energie** zachovává. V závislosti na parametru  $\varepsilon$  lze přitom získat jednu ze čtyř kuželoseček (viz obr. 36):

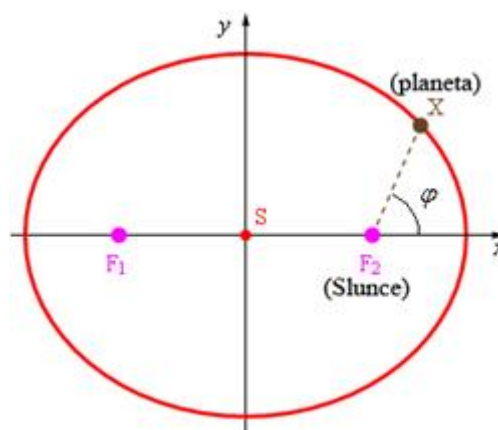
1. pro  $\varepsilon = 0$  kružnici - což je křivka, po níž se pohybuje těleso s minimální **energií**, kterou je možné odvodit ze vztahu (93):

$$E_{\min} = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2l^2}; \quad (94)$$

2. pro  $\varepsilon \in (0, 1)$  **elipsu**, přičemž  $\varphi = 0$  popisuje **perihélium** trajektorie daného tělesa a  $\varphi = \pi$  odpovídá **aféliu** dané trajektorie (viz obr. 37). Energie, kterou má pohybující se těleso, je záporná.
3. pro  $\varepsilon = 1$  parabolu, protože pro  $\varphi = \pi$  se trajektorii otvírá. Energie tělesa je nulová.
4. pro  $\varepsilon > 1$  **hyperbolu**, trajektorie se otvírá dříve než při  $\varphi = \pi$  a těleso má kladnou energii.

Typ kuželosečky v závislosti na energii tělesa lze určit pomocí **efektivního potenciálu**.

Z obr. 36 je vidět, že kuželosečky lze získat i tak, jak vyplývá z jejich názvu: lze „seknout“ kužel rovinou, která má pro každou kuželosečku určitou speciální polohu.



Obr. 37

Při odvozování obecného tvaru trajektorie jsme se mohli omezit na popis pomocí dvou souřadnic, neboť **pohyb** v poli centrální síly je vždy pohyb rovinný. Navíc popis pomocí lagrangeových rovnic vede na dva **integrály pohybu** - v našem konkrétním případě se zachovává moment **hybnosti** / a celková mechanická energie  $E$ .

Na základě obecného odvození a na základě geometrického významu řešení (91) lze nyní formulovat **Keplerovy zákony**, které popisují **pohyb planet** ve **Sluneční soustavě**.

Autorem Kepleových [zákonů](#) je německý matematik Johannes [Kepler](#) (1571 - 1630). Odvodil je na základě pozorování, která prováděl dánský astronom [Tycho Brahe](#). První a [druhý Keplerův zákon](#) byly publikovány v *Astronomia nova* (Nová [astronomie](#)) vydané v roce 1609 v Praze, [třetí Keplerův zákon](#) pak v roce 1619 v Linci v díle *Harmoniae mundi* (*Harmonie světa*).

---

© **Encyklopedie Fyziky** (<http://fyzika.jreichl.com>); **Jaroslav Reichl, Martin Všeticka**

Licence <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> zakazuje úpravy a komerční distribuci.