

## Rozptyl nabitých částic

Dalším případem [pohybu](#) v centrálním [poli](#) je pohyb [částice](#) o hmotnosti  $m$  a s nábojem  $Q_2$  v [elektrostatickém poli](#) buzeném částicí s nábojem  $Q_1$  o hmotnosti  $M$ . Bez újmy na obecnosti budeme uvažovat dvě kladně nabitě částice, z nichž ta s nábojem  $Q_1$  má výrazně vyšší hmotnost ve srovnání s částicí s nábojem  $Q_2$ , tj.

$$M \gg m. \quad (109)$$

Tato podmínka umožní řešit úlohu tak, že budeme uvažovat částici s nábojem  $Q_2$ , která bude přilétat z velké vzdálenosti k částici s nábojem  $Q_1$ , která je v [klidu](#).

Vzhledem k podmínce (109), lze považovat částici s nábojem  $Q_1$  za nehybnou. Na obě částice sice působí stejně velká [elektrostatická síla](#), ale vlivem své větší hmotnosti má částice s nábojem  $Q_1$  ve srovnání s druhou částicí zanedbatelné [zrychlení](#). Proto jí lze považovat za nehybnou. V praxi to znamená, že např. na jádro zlata bude nalétávat jádro helia. Tento [experiment](#) na začátku 20. století prováděl Rutherford.

[Potenciální energie](#) vyplývající z [Coulombova zákona](#) má tvar

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (110)$$

který je formálně podobný Newtonovské [potenciální energii](#) v [gravitačním poli](#) (viz vztah (89)) a ve kterém

$$\alpha = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (111)$$

Coulombická potenciální energie je ovšem kladná, neboť interakce mezi dvěma kladně nabitými částicemi je odpuzivá (na rozdíl od přitažlivé [gravitační síly](#) působící mezi tělesem obíhajícím kolem centra gravitačního silového pole a tímto centrem).

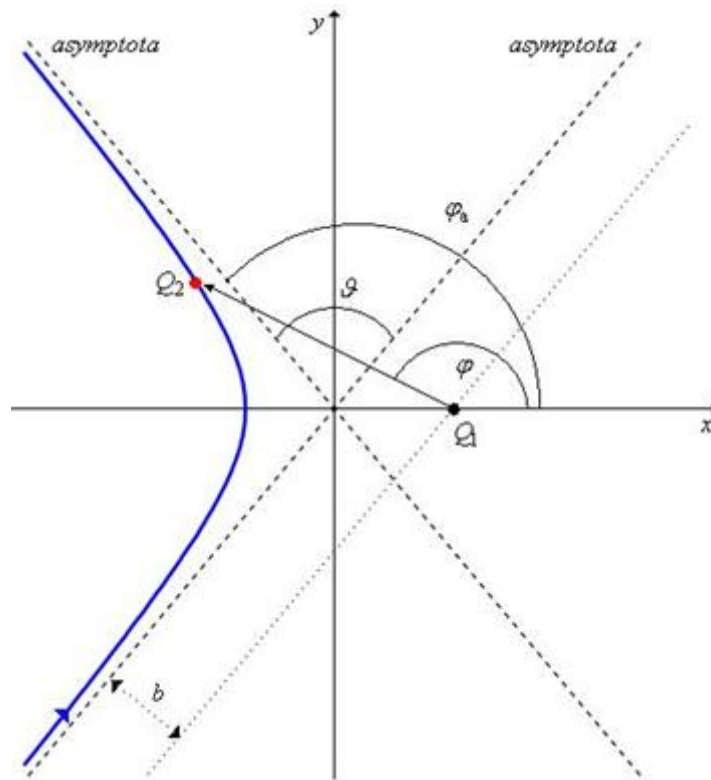
[Energie](#) částice s nábojem  $Q_2$  je kladná, ale [trajektorie](#), po níž se bude v silovém poli částice s nábojem  $Q_1$  pohybovat, bude splňovat vztah (91). Částice s nábojem  $Q_2$  se tedy pohybuje po kuželosečce. Vzhledem ke kladné energii částice je touto kuželosečkou [hyperbola](#). Pro popis trajektorie bude důležitý **úhel odklonu**  $\vartheta$  částice s nábojem  $Q_2$  v poli částice s nábojem  $Q_1$  (viz obr. 45). To znamená, že nás zajímá směr vstupní asymptoty a výstupní asymptoty hyperboly, po níž se částice pohybuje. Vzhledem k tomu, že částice s nábojem  $Q_2$  přilétá z velké vzdálenosti a po odchýlení své trajektorie zase odlétá do velké vzdálenosti, můžeme asymptoty charakterizovat podmínkou  $r \rightarrow \infty$ . Ze vztahu (91) pak vyplývá

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\epsilon}, \quad (112)$$

kde  $\varphi$  je úhel určující polohu pohybující se částice s nábojem  $Q_2$  (viz obr. 45). Úhel odklonu  $\vartheta$  je dán vztahem

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta}{2}, \quad (113)$$

kde  $\varphi_2$  je směrový úhel výstupní asymptoty.



Obr. 45

S využitím vztahů [\(113\)](#) a [\(112\)](#) můžeme psát

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \operatorname{tg} \left( \varphi_a - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\cos \varphi_a}{\sin \varphi_a} = -\frac{\cos \varphi_a}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_a}} = \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}. \text{ Po dosazení ze vztahu (93) dostáváme}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{\alpha^2 m}{2l^2 E}}. \quad (114)$$

Nyní je nutné vyjádřit [celkovou energii](#)  $E$  částice s nábojem  $Q_2$  a její moment [hybnosti](#)  $l$ . Tyto zachovávající se [fyzikální veličiny](#) stačí určit v místech trajektorie, v nichž jsou snadno určitelné.

Celková energie  $E$  částice i moment hybnosti  $l$  jsou v centrálním silovém poli [integrály pohybu](#), proto platí jejich [zákony](#) zachování - tj. [zákon zachování energie](#) a zákon zachování momentu hybnosti.

Částice s nábojem  $Q_2$  přilétá z velké vzdálenosti s počáteční [rychlostí](#) o velikosti  $v_\infty$ . Pro vzdálenost  $r \rightarrow \infty$  je potenciální energie  $V$  částice (na základě [\(110\)](#)) nulová. Takže celková energie  $E$  je rovna [kinetické energii](#) částice, tedy

$$E = T = \frac{1}{2} m v_\infty^2 = \text{konst.} \quad (115)$$

Analogicky získáme i moment hybnosti částice ve vzdálenosti  $r \rightarrow \infty$ :

$$l = m v_\infty b, \quad (116)$$

kde  $b$  je tzv. **záměrná vzdálenost (impaktní parametr)** určující vzdálenost vstupní asymptoty od částice s nábojem  $Q_1$  (která je v klidu).

Dosazením ze vztahů [\(111\)](#), [\(115\)](#) a [\(116\)](#) do vztahu [\(114\)](#) postupně získáme

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \left| \frac{\alpha}{l} \right| \sqrt{\frac{m}{2 \frac{1}{2} m v_{\infty}^2}} = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon_0 m v_{\infty} b v_{\infty}}, \text{ takže}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon_0 m v_{\infty}^2 b}. \quad (117)$$

Fakt, že uvedený vztah je kvalitativně správný v závislosti na záměrné vzdálenosti  $b$ , lze ověřit na dvou význačných hodnotách vzdálenosti  $b$ :

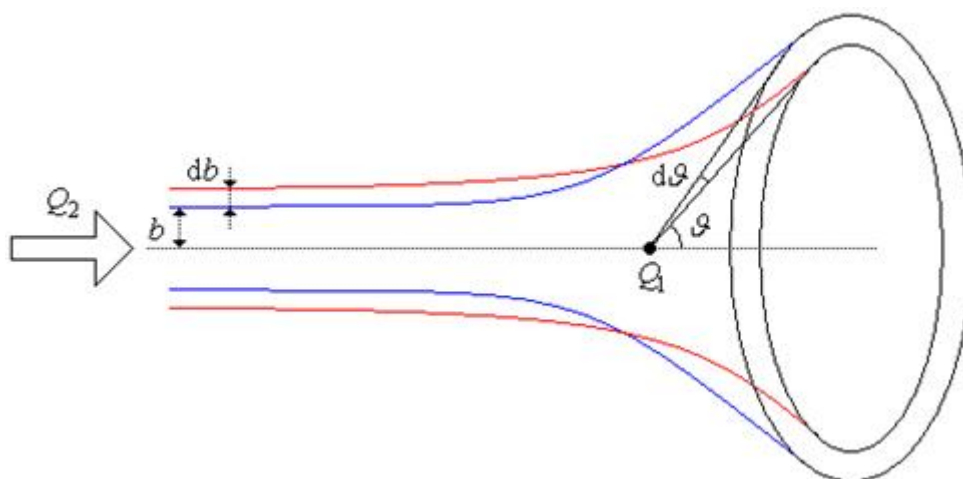
1. pro  $b \rightarrow \infty$  (tj. částice nalétává na stojící částici ve velké vzdálenosti) je  $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = 0$  a tedy  $\vartheta = 0$  (pohybující se částice není částicí v klidu ovlivněna);
2. pro  $b \rightarrow 0$  (tj. částice nalétává přímo na stojící částici) je  $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \rightarrow \infty$  a tedy  $\vartheta = \pi$  (pohybující se částice se od částice nabité nábojem stejného znaménka, která je v klidu, odráží zpět do směru, odkud přiletěla).

Ve skutečnosti, pokud se provádějí tyto experimenty, nalétává velké množství částic najednou na větší množství center a zkoumá se vzájemná interakce všech nalétávajících částic s centry. Nalétávající částice mají různé hodnoty záměrné vzdálenosti  $b$  a proto je rozumné zkoumat závislost záměrné vzdálenosti na úhlu, do kterého se tyto částice rozptýlí. Jsou-li záměrné vzdálenosti  $N$  nalétávajících částic v intervalu  $(b; b + db)$ , rozptýlí se  $dN$  těchto částic do úhlu  $(\vartheta; \vartheta + d\vartheta)$  (viz obr. 46). Je-li plošná hustota center  $n$ , můžeme definovat účinný průřez  $d\sigma$  vztahem

$$d\sigma = \frac{dN}{nN}; \quad (118)$$

přitom  $[d\sigma] = \text{m}^2$ .

Účinný průřez udává plochu, jakou si navzájem nastavují nalétávající částice a centra, která jsou v klidu. Účinný průřez lze vysvětlit i na příkladu člověka, na kterého je veden útok míčem. Stojící člověk má větší plochu a tedy i větší pravděpodobnost zásahu míčem (tj. má větší účinný průřez). Stočí-li se do „klubíčka“, jeho plocha, kterou nastavuje letícímu míči, se zmenší a tedy se zmenší i jeho účinný průřez.



Obr. 46

Letící částice, které se rozptýlí do úhlu  $(\vartheta; \vartheta + d\vartheta)$ , nalétávají z mezikruží, jehož účinný průřez je

$$d\sigma = 2\pi b db. \quad (119)$$

Účinný průřez má význam plochy - proto je účinný průřez v tomto případě roven ploše mezikruží.

Plocha mezikruží ohraničená **kružnicemi** s poloměry  $r$  a  $r + dr$  je  $dS = S_1 - S_2$ . Po dosazení tedy máme  $dS = \pi (r + dr)^2 - \pi r^2 = \pi (r^2 + 2r \cdot dr + (dr)^2 - r^2) \doteq 2\pi r \cdot dr$  pro  $dr \rightarrow 0$ .

Ze vztahu (117) můžeme vyjádřit  $b = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\omega^2} \cotg \frac{\vartheta}{2}$  a dosadit do vztahu (119). K tomu je ještě nutné vyjádřit diferenciál  $db = \frac{1}{2} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\omega^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta$ . Po dosazení tedy máme

$d\sigma = 2\pi \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\omega^2} \cotg \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\omega^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta$ , takže dostáváme

$$d\sigma = \pi \left( \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\omega^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta. \quad (120)$$

Vztah (120) je **Rutherfordův vztah pro rozptyl** kladných částic na kladných centrech. Zkoumání tohoto rozptylu se stalo významným na počátku 20. století, kdy bylo na základě podobných experimentů objeveno **jádro atomu**. V roce 1911 se o to zasloužil Ernst Rutherford a jeho kolegové. Tím byla odstartována další část vývoje fyziky. V současné době se tyto rozptylové experimenty provádějí i na **urychlovačích** částic, neboť s rostoucí energií, kterou pohybující se částice má, roste velikost její rychlosti. Po vzájemných **srážkách** takto urychlených částic lze studovat hmotu do větších detailů.

Dodáním větší energie stojící částici se tato částice rozletí na více menších částic a tyto menší částice je možné dále studovat.

Při pečlivé analýze uvedeného experimentu je nutné vzít do úvahy, že se ve skutečnosti pohybují obě částice - jak ta, která nalétává, tak i centrum, na které druhá částice nalétává. Pokud ovšem platí podmínka (109), lze úlohu studovat výše uvedeným postupem.

Pokud podmínka (109) nebude splněna, je nutné situaci popisovat analogicky jako se popisuje **problém dvou těles**.