

Rozptyl nabitých částic

Dalším případem [pohybu](#) v centrálním [poli](#) je pohyb [částice](#) o hmotnosti m a s nábojem Q_2 v [elektrostatickém poli](#) buzeném částicí s nábojem Q_1 o hmotnosti M . Bez újmy na obecnosti budeme uvažovat dvě kladně nabitě částice, z nichž ta s nábojem Q_1 má výrazně vyšší hmotnost ve srovnání s částicí s nábojem Q_2 , tj.

$$M \gg m. \quad (109)$$

Tato podmínka umožní řešit úlohu tak, že budeme uvažovat částici s nábojem Q_2 , která bude přilétat z velké vzdálenosti k částici s nábojem Q_1 , která je v [klidu](#).

Vzhledem k podmínce (109), lze považovat částici s nábojem Q_1 za nehybnou. Na obě částice sice působí stejně velká [elektrostatická síla](#), ale vlivem své větší hmotnosti má částice s nábojem Q_1 ve srovnání s druhou částicí zanedbatelné [zrychlení](#). Proto jí lze považovat za nehybnou. V praxi to znamená, že např. na jádro zlata bude nalétávat jádro helia. Tento [experiment](#) na začátku 20. století prováděl Rutherford.

[Potenciální energie](#) vyplývající z [Coulombova zákona](#) má tvar

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (110)$$

který je formálně podobný Newtonovské [potenciální energii](#) v [gravitačním poli](#) (viz vztah (89)) a ve kterém

$$\alpha = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (111)$$

Coulombická potenciální energie je ovšem kladná, neboť interakce mezi dvěma kladně nabitými částicemi je odpuzivá (na rozdíl od přitažlivé [gravitační síly](#) působící mezi tělesem obíhajícím kolem centra gravitačního silového pole a tímto centrem).

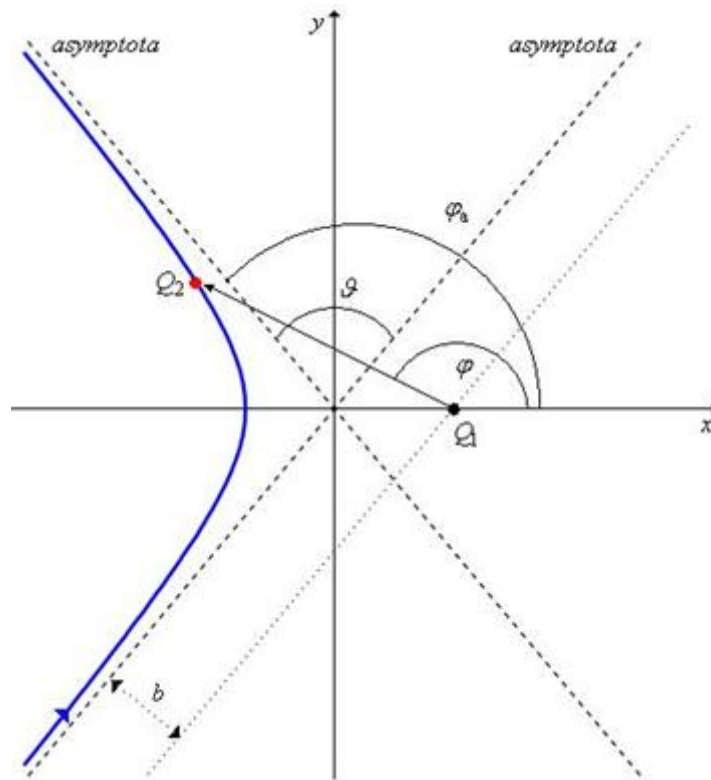
[Energie](#) částice s nábojem Q_2 je kladná, ale [trajektorie](#), po níž se bude v silovém poli částice s nábojem Q_1 pohybovat, bude splňovat vztah (91). Částice s nábojem Q_2 se tedy pohybuje po kuželosečce. Vzhledem ke kladné energii částice je touto kuželosečkou [hyperbola](#). Pro popis trajektorie bude důležitý **úhel odklonu** ϑ částice s nábojem Q_2 v poli částice s nábojem Q_1 (viz obr. 45). To znamená, že nás zajímá směr vstupní asymptoty a výstupní asymptoty hyperboly, po níž se částice pohybuje. Vzhledem k tomu, že částice s nábojem Q_2 přilétá z velké vzdálenosti a po odchýlení své trajektorie zase odlétá do velké vzdálenosti, můžeme asymptoty charakterizovat podmínkou $r \rightarrow \infty$. Ze vztahu (91) pak vyplývá

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\epsilon}, \quad (112)$$

kde φ je úhel určující polohu pohybující se částice s nábojem Q_2 (viz obr. 45). Úhel odklonu ϑ je dán vztahem

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta}{2}, \quad (113)$$

kde φ_2 je směrový úhel výstupní asymptoty.



Obr. 45

S využitím vztahů [\(113\)](#) a [\(112\)](#) můžeme psát

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \operatorname{tg} \left(\varphi_a - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\cos \varphi_a}{\sin \varphi_a} = -\frac{\cos \varphi_a}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_a}} = \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}. \text{ Po dosazení ze vztahu (93) dostáváme}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{\alpha^2 m}{2l^2 E}}. \quad (114)$$

Nyní je nutné vyjádřit [celkovou energii](#) E částice s nábojem Q_2 a její moment [hybnosti](#) l . Tyto zachovávající se [fyzikální veličiny](#) stačí určit v místech trajektorie, v nichž jsou snadno určitelné.

Celková energie E částice i moment hybnosti l jsou v centrálním silovém poli [integrály pohybu](#), proto platí jejich [zákony](#) zachování - tj. [zákon zachování energie](#) a zákon zachování momentu hybnosti.

Částice s nábojem Q_2 přilétá z velké vzdálenosti s počáteční [rychlostí](#) o velikosti v_∞ . Pro vzdálenost $r \rightarrow \infty$ je potenciální energie V částice (na základě [\(110\)](#)) nulová. Takže celková energie E je rovna [kinetické energii](#) částice, tedy

$$E = T = \frac{1}{2} m v_\infty^2 = \text{konst.} \quad (115)$$

Analogicky získáme i moment hybnosti částice ve vzdálenosti $r \rightarrow \infty$:

$$l = m v_\infty b, \quad (116)$$

kde b je tzv. **záměrná vzdálenost (impaktní parametr)** určující vzdálenost vstupní asymptoty od částice s nábojem Q_1 (která je v klidu).

Dosazením ze vztahů [\(111\)](#), [\(115\)](#) a [\(116\)](#) do vztahu [\(114\)](#) postupně získáme

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \left| \frac{\alpha}{l} \right| \sqrt{\frac{m}{2 \frac{1}{2} m v_{\infty}^2}} = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon_0 m v_{\infty} b v_{\infty}}, \text{ takže}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon_0 m v_{\infty}^2 b}. \quad (117)$$

Fakt, že uvedený vztah je kvalitativně správný v závislosti na záměrné vzdálenosti b , lze ověřit na dvou význačných hodnotách vzdálenosti b :

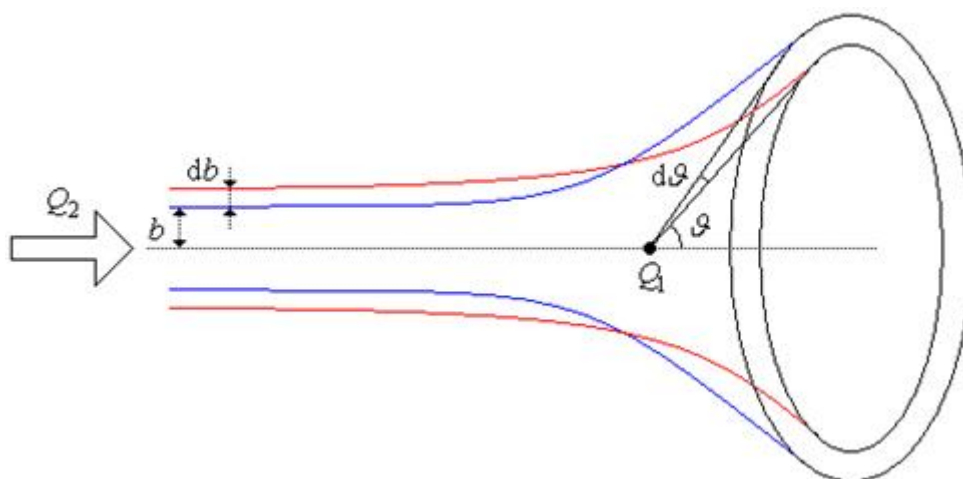
1. pro $b \rightarrow \infty$ (tj. částice nalétává na stojící částici ve velké vzdálenosti) je $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = 0$ a tedy $\vartheta = 0$ (pohybující se částice není částicí v klidu ovlivněna);
2. pro $b \rightarrow 0$ (tj. částice nalétává přímo na stojící částici) je $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \rightarrow \infty$ a tedy $\vartheta = \pi$ (pohybující se částice se od částice nabitě nábojem stejného znaménka, která je v klidu, odráží zpět do směru, odkud přiletěla).

Ve skutečnosti, pokud se provádějí tyto experimenty, nalétává velké množství částic najednou na větší množství center a zkoumá se vzájemná interakce všech nalétávajících částic s centry. Nalétávající částice mají různé hodnoty záměrné vzdálenosti b a proto je rozumné zkoumat závislost záměrné vzdálenosti na úhlu, do kterého se tyto částice rozptýlí. Jsou-li záměrné vzdálenosti N nalétávajících částic v intervalu $(b; b + db)$, rozptýlí se dN těchto částic do úhlu $(\vartheta; \vartheta + d\vartheta)$ (viz obr. 46). Je-li plošná hustota center n , můžeme definovat účinný průřez $d\sigma$ vztahem

$$d\sigma = \frac{dN}{nN}; \quad (118)$$

přitom $[d\sigma] = \text{m}^2$.

Účinný průřez udává plochu, jakou si navzájem nastavují nalétávající částice a centra, která jsou v klidu. Účinný průřez lze vysvětlit i na příkladu člověka, na kterého je veden útok míčem. Stojící člověk má větší plochu a tedy i větší pravděpodobnost zásahu míčem (tj. má větší účinný průřez). Stočí-li se do „klubíčka“, jeho plocha, kterou nastavuje letícímu míči, se zmenší a tedy se zmenší i jeho účinný průřez.



Obr. 46

Letící částice, které se rozptýlí do úhlu $(\vartheta; \vartheta + d\vartheta)$, nalétávají z mezikruží, jehož účinný průřez je

$$d\sigma = 2\pi b db. \quad (119)$$

Účinný průřez má význam plochy - proto je účinný průřez v tomto případě roven ploše mezikruží.

Plocha mezikruží ohraničená **kružnicemi** s poloměry r a $r + dr$ je $dS = S_1 - S_2$. Po dosazení tedy máme $dS = \pi (r + dr)^2 - \pi r^2 = \pi (r^2 + 2r \cdot dr + (dr)^2 - r^2) \doteq 2\pi r \cdot dr$ pro $dr \rightarrow 0$.

Ze vztahu (117) můžeme vyjádřit $b = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\omega^2} \cotg \frac{\vartheta}{2}$ a dosadit do vztahu (119). K tomu je ještě nutné vyjádřit diferenciál $db = \frac{1}{2} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\omega^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta$. Po dosazení tedy máme

$d\sigma = 2\pi \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\omega^2} \cotg \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\omega^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta$, takže dostáváme

$$d\sigma = \pi \left(\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\omega^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta. \quad (120)$$

Vztah (120) je **Rutherfordův vztah pro rozptyl** kladných částic na kladných centrech. Zkoumání tohoto rozptylu se stalo významným na počátku 20. století, kdy bylo na základě podobných experimentů objeveno **jádro atomu**. V roce 1911 se o to zasloužil Ernst Rutherford a jeho kolegové. Tím byla odstartována další část vývoje fyziky. V současné době se tyto rozptylové experimenty provádějí i na **urychlovačích** částic, neboť s rostoucí energií, kterou pohybující se částice má, roste velikost její rychlosti. Po vzájemných **srážkách** takto urychlených částic lze studovat hmotu do větších detailů.

Dodáním větší energie stojící částici se tato částice rozletí na více menších částic a tyto menší částice je možné dále studovat.

Při pečlivé analýze uvedeného experimentu je nutné vzít do úvahy, že se ve skutečnosti pohybují obě částice - jak ta, která nalétává, tak i centrum, na které druhá částice nalétává. Pokud ovšem platí podmínka (109), lze úlohu studovat výše uvedeným postupem.

Pokud podmínka (109) nebude splněna, je nutné situaci popisovat analogicky jako se popisuje **problém dvou těles**.