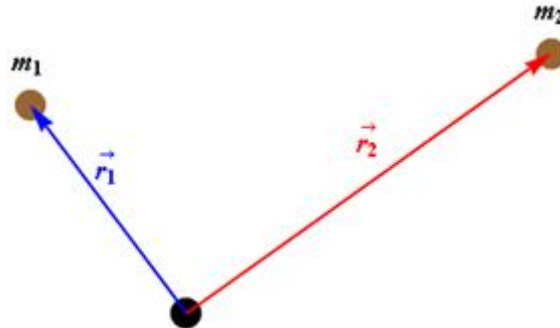


## Problém dvou těles

Uvažujme nyní [pohyb](#) dvou těles o srovnatelných hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ , jejichž polohy jsou popsány polohovými vektory  $\vec{r}_1$  a  $\vec{r}_2$  (viz obr. 47).

Takovými tělesy může být např. dvojice [Země - Měsíc](#), [Pluto - Cháron](#), [dvojhvězda](#), ...



Obr. 47

Systém má celkem 6 stupňů volnosti (na každé těleso připadají 3 stupně volnosti) a budeme uvažovat pouze vzájemné silové působení (nebudeme tedy započítávat např. vliv centra uvažovaného centrálního [pole](#)).

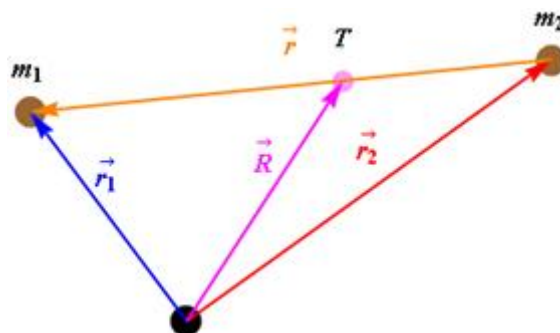
Tři stupně volnosti připadající na každé těleso odpovídají tomu, že každé z těles se může pohybovat ve třech navzájem nezávislých směrech.

Můžeme tedy napsat [lagrangián](#) této situace ve tvaru

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 + \frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (121)$$

Tento tvar lagrangiánu ale není příliš vhodný pro další výpočty - [zobecněné souřadnice](#)  $\vec{r}_1$  a  $\vec{r}_2$  nejsou zvoleny nejlépe. Lepší volba by byla zvolit relativní [souřadnice](#)  $\vec{R}$  a  $\vec{r}$ , kde  $\vec{R}$  je poloha [těžiště](#) systému uvažovaných těles a  $\vec{r}$  je relativní poloha těles vůči sobě (viz obr. 48). Převodní vztahy tedy jsou

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \text{ a } \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (122)$$



Obr. 48

Na základě vztahů (122) (tj. řešením soustavy rovnic pro neznámé  $\vec{r}_1$  a  $\vec{r}_2$ ) získáme:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{a} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (123)$$

Dosažením rovnic (123) do lagrangiánu ve tvaru (121) dostaneme lagrangián ve tvaru

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{Gm_1 m_2}{r}, \quad (124)$$

který nezávisí na zobecněné souřadnici  $R$ . To ovšem znamená, že

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}} = \text{konst.} \quad (125)$$

je [integrál pohybu](#). Konkrétně vztah (125) je vyjádřením [zákona zachování hybnosti](#). Jestliže se ovšem zachovává [hybnost](#), nepůsobí na uvažovanou soustavu těles okolní tělesa [silou](#) a soustava sama se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem. Proto se rovnoměrně přímočaře pohybuje i těžiště  $T$  soustavy uvažovaných těles. Bez újmy na obecnosti tedy můžeme vyšetřovat pohyb těles o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  v těžištvé soustavě. To ovšem znamená, že  $\vec{R} = \vec{o}$ .

V těžištvé soustavě se totiž těžiště nepohybuje.

Skutečnost, že si můžeme zvolit libovolnou [vztažnou soustavu](#), v níž budeme pohyb vyšetřovat, vyplývá z relativnosti pohybu a [Galileiho transformace](#) mezi dvěma soustavami souřadnic.

Vyjádření (123) původních vektorů  $\vec{r}_1$  a  $\vec{r}_2$  v závislosti na nově zvolených zobecněných souřadnicích  $\vec{R}$  a  $\vec{r}$  se tedy zjednoduší:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{a} \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (126)$$

Tím se podařila redukce původní úlohy na úlohu jednodušší, jejíž lagrangián bude mít tvar

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + \frac{Gm_1 m_2}{r}, \quad (127)$$

kde

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (128)$$

je tzv. **redukovaná hmotnost**. Tím jsme získali úlohu, která je analogická jako [Keplerova úloha](#): jedná se o pohyb tělesa s hmotností  $\mu$  v centrálním silovém poli tělesa o hmotnosti  $m_1 + m_2$  (viz obr. 49). Platí tedy i závěry vyplývající z řešení Keplerovy úlohy (tj. např. [Keplerovy zákony](#)), ale je nutné vše přeformulovat pomocí nových proměnných, pomocí nových hmotností  $\mu$  a  $m_1 + m_2$ .



Skutečnost, že máme dvě tělesa o hmotnostech  $\mu$  a  $m_1+m_2$ , vyplývá z lagrangiánu zapsaného ve tvaru (127), do jehož druhého členu můžeme též dosadit ze vztahu (128). Dostaneme tak

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{G\mu(m_1+m_2)}{r}. \quad (129)$$

---

© **Encyklopedie Fyziky** (<http://fyzika.jreichl.com>); **Jaroslav Reichl, Martin Všeticka**

Licence <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> zakazuje úpravy a komerční distribuci.