Eulerovy - Lagrangeovy rovnice

Eulerovy - Lagrangeovy rovnice jsou rovnice, které umožňují nalézt extrém funkcionálu a které se používají obecně při optimalizaci. Ve fyzice jsou vhodné pro odvození pohybových rovnic pohybujících se hmotných bodů či těles. Jejich odvození je analogické jako odvození Lagrangeových rovnic: tj. vychází se z platnosti nulové variace akce (vztah (130)), tj. z Hamiltonova variačního principu. Rozdíl spočívá v tom, že se nehledá rovnice, které řeší Lagrangeova funkce $L\left(q^j(t), \dot{q}^j(t), t\right)$, ale rovnice, které řeší obecná funkce $F\left(y^j(x), y'^j(x), x\right)$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$, kde $y'^j(x) = \frac{\mathrm{d}y^j(x)}{\mathrm{d}x}$.

Řešením jsou pak rovnice ve tvaru

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'^j}\right) = 0\,. \tag{142}$$

Tyto rovnice mají formálně stejný tvar jako Lagrangeovy rovnice (47).

Rovnice (142) lze upravit do dalšího tvaru, který je pro řešení úloh občas výhodnější. Začneme tím, že tyto rovnice vynásobíme výrazem $y'^j = \frac{\mathrm{d}y^j}{\mathrm{d}x}$. Dále si uvědomíme, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'^j \frac{\partial F}{\partial y'^j}\right) = \frac{\mathrm{d}y'^j}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'^j} + y'^j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'^j}\right). \tag{143}$$

Nyní postupně vynásobíme rovnice (142) výrazem $y'^j = \frac{\mathrm{d}y^j}{\mathrm{d}x}$ a upravíme s využitím identity (143). Postupně dostaneme $0 = \sum_{j=1}^{n}\left(y'^j \frac{\partial F}{\partial y^j} - y'^j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'^j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(y'^j \frac{\partial F}{\partial y^j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'^j \frac{\partial F}{\partial y'^j}\right) + \frac{\mathrm{d}y'^j}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'^j}\right)$. Uvědomíme-li si, že platí

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y^j} y'^j + \frac{\partial F}{\partial y'^j}\frac{\mathrm{d}y'^j}{\mathrm{d}x}\,, \tag{144}$$

můžeme pokračovat v úpravách $0 = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'^j \frac{\partial F}{\partial y'^j}\right)\right)$. Poslední úprava, kterou provedeme, vyplývá z vlastnosti derivace součtu. Získáme tak rovnice

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'^j \frac{\partial F}{\partial y'^j}\right) - \frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0\,, \tag{145}$$

což je další z podob Eulerových - Lagrangeových rovnic.

Rovnice (145) lze dále přepsat do jednoduššího tvaru, pokud budeme vyšetřovat pohyb jednoho hmotného bodu s jedním stupněm volnosti a pokud navíc funkce *F* nebude explicitně záviset na souřadnici *x*. V tom případě totiž $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ a rovnice (145) přejdou do tvaru $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$, odkud plyne

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = konst. \tag{146}$$

V této podobě je rovnice občas užitečná pro řešení úloh.