

## Kalibrační transformace a kalibrační symetrie

Kalibrační transformace a kalibrační symetrie jsou důležité nejen pro řešení úloh, ale také pro budování fyzikálního aparátu jako takového. Dříve, než ukážeme konkrétní použití, vyslovíme a dokážeme tvrzení.

**POHYBOVÉ ROVNICE POPISUJÍCÍ DANÝ SYSTÉM SE NEZMĚNÍ, PŘIPOČTEME-LI K LAGRANGEOVĚ FUNKCI  $L$  ÚPLNOU ČASOVOU DERIVACI LIBOVOLNÉ FUNKCE  $f(q)$  (KDE  $q$  JE ZOBECNĚNÁ SOUŘADNICE).**

Při důkazu vyjdeme z uvedeného tvrzení. Kromě [lagrangiánu](#)  $L$  budeme předpokládat, že existuje lagrangián  $L_1$  definovaný (podle tvrzení) vztahem

$$L_1 = L + \frac{df(q(t))}{dt}. \quad (168)$$

Pro akci  $S_1$  odpovídající lagrangiánu  $L_1$  můžeme podle (131) psát

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_2} L_1 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( L + \frac{df(q(t))}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df(q(t))}{dt} dt = S + [f(q(t))]_{t_1}^{t_2}. \text{ Dostáváme tedy}$$

$$S_1 = S + f(q(t_2)) - f(q(t_1)). \quad (169)$$

Pohybové rovnice (resp. popis systému) získáme pomocí vztahu (130). Dosadíme-li tedy do vztahu (130) odvozenou akci (169), dostaneme

$$0 = \delta S_1 = \delta S + \frac{\partial f(q)}{\partial q} \delta q(t_2) - \frac{\partial f(q)}{\partial q} \delta q(t_1). \quad (170)$$

Vzhledem k platnosti podmínky (132) ze vztahu (170) plyne

$$0 = \delta S_1 = \delta S. \quad (171)$$

Tím je důkaz ukončen: pro oba uvažované lagrangiány (tj. pro lagrangián  $L$  i lagrangián ve tvaru (168)) je [variace akce](#) nulová (viz výsledek (171)). Oba lagrangiány dávají tedy stejný popis daného systému.

Právě dokázané tvrzení se využívá u [kanonických transformací](#) systému v [Hamiltonově formalismu](#).

**Příklad:** Nabitá částice v [elektromagnetickém poli](#)

Lagrangián nabité částice s nábojem  $e$  a s hmotností  $m$ , která se pohybuje v elektromagnetickém poli popsaném [veličinami](#)  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$ , je:  $L = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + e\vec{v}\cdot\vec{A}$ , neboť [potenciální energie](#)  $V$  je dána vztahem (70).

Lagrangián  $L_1$ , který je dán vztahem (168), dává podle dokázaného tvrzení stejné řešení. Takže můžeme psát:  $L_1 = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + e\vec{v}\cdot\vec{A} + \frac{df}{dt}$ . Funkce  $f$  obecně závisí na prostorových [souřadnicích](#) a na čase (tj.  $f(x^i, t)$ ), takže s postupně prováděnými úpravami lze lagrangián  $L_1$  psát ve tvaru

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + e\vec{v}\cdot\vec{A} + \frac{df}{dt} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x^i} \dot{x}^i = \frac{1}{2}mv^2 - e \left( \varphi - \frac{1}{e} \frac{df}{dt} \right) + e\vec{v}\cdot\vec{A} + \vec{v}\cdot\text{grad}f = \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - e \left( \varphi - \frac{1}{e} \frac{df}{dt} \right) + e\vec{v}\cdot \left( \vec{A} + \frac{1}{e} \text{grad}f \right) = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi' + e\vec{v}\cdot\vec{A}'. \end{aligned}$$

Získali jsme tak tvar lagrangiánu, který dává stejné výsledky jako původní lagrangián, jestliže platí

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{e} \frac{\partial f}{\partial t} \text{ a } \vec{A}' = \vec{A} + \frac{1}{e} \text{grad} f .$$

Změnili jsme tedy dvě polní veličiny a lagrangián je vzhledem k této změně invariantní. Jedná se tedy o zvláštní případ [lokální symetrie](#). V tomto případě mluvíme o tzv. **kalibrační transformaci**, vůči níž je lagrangián invariantní.

[Maxwellovy rovnice](#) zůstávají v platnosti a mají stejný tvar jako pro lagrangián  $L$ . Veličiny, které můžeme měřit (tj. veličiny  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$ ) jsou také stejné (jak vyplývá z Mawellových rovnic).

$$\text{Např. pro } \vec{B}, \vec{A} \text{ a } \vec{A}' \text{ platí: } \text{rot} \vec{A}' = \text{rot} \left( \vec{A} + \frac{1}{e} \text{grad} f \right) = \text{rot} \vec{A} + \frac{1}{e} \text{rot grad} f = \text{rot} \vec{A} = \vec{B} .$$

Podobným postupem fyzika vytváří nové teorie. Dbá se nejen na to, aby daná teorie odpovídala experimentálním měřením, ale také na to, aby splňovala kalibrační transformace. Tím se zjednoduší popis daného systému v různých soustavách a teorie bude pro řešení úloh jednodušší.

---

© **Encyklopedie Fyziky** (<http://fyzika.jreichl.com>); **Jaroslav Reichl, Martin Všeticka**

Licence <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> zakazuje úpravy a komerční distribuci.