Kalibrační transformace a kalibrační symetrie

Kalibrační transformace a kalibrační symetrie jsou důležité nejen pro řešení úloh, ale také pro budování fyzikálního aparátu jako takového. Dříve, než ukážeme konkrétní použití, vyslovíme a dokážeme tvrzení.

POHYBOVÉ ROVNICE POPISUJÍCÍ DANÝ SYSTÉM SE NEZMĚNÍ, PŘIPOČTEME-LI K LAGRANGEOVĚ FUNKCI L ÚPLNOU ČASOVOU DERIVACI LIBOVOLNÉ FUNKCE $f(q)$ (KDE q JE ZOBECNĚNÁ SOUŘADNICE).

Při důkazu vyjdeme z uvedeného tvrzení. Kromě lagrangiánu *L* budeme předpokládat, že existuje lagrangián L_1 definovaný (podle tvrzení) vztahem

$$L_1 = L + \frac{\mathrm{d}f\left(q(t)\right)}{\mathrm{d}t}. \qquad (168)$$

Pro akci S_1 odpovídající lagrangiánu L_1 můžeme podle (131) psát $S_1 = \int_{t_1}^{t_2} L_1 \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \frac{\mathrm{d}f\left(q(t)\right)}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} L \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}f\left(q(t)\right)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = S + \left[f\left(q(t)\right) \right]_{t_1}^{t_2}$. Dostáváme tedy

$$S_1 = S + f\left(q(t_2)\right) - f\left(q(t_1)\right). \qquad (169)$$

Pohybové rovnice (resp. popis systému) získáme pomocí vztahu (130). Dosadíme-li tedy do vztahu (130) odvozenou akci (169), dostaneme

$$0 = \delta S_1 = \delta S + \frac{\partial f(q)}{\partial q} \delta q(t_2) - \frac{\partial f(q)}{\partial q} \delta q(t_1). \qquad (170)$$

Vzhledem k platnosti podmínky (132) ze vztahu (170) plyne

$$0 = \delta S_1 = \delta S. \qquad (171)$$

Tím je důkaz ukončen: pro oba uvažované lagrangiány (tj. pro lagrangián *L* i lagrangián ve tvaru (168)) je variace akce nulová (viz výsledek (171)). Oba lagrangiány dávají tedy stejný popis daného systému.

Právě dokázané tvrzení se využívá u kanonických transformací systému v Hamiltonově formalismu.

Příklad: Nabitá částice v elektromagnetickém poli

Lagrangián nabité částice s nábojem *e* a s hmotností *m*, která se pohybuje v elektromagnetickém poli popsaném veličinami $\vec{E}$ a $\vec{B}$, je: $L = \frac{1}{2} m v^2 - e\varphi + e\vec{v}.\vec{A}$, neboť potenciální energie *V* je dána vztahem (70).

Lagrangián L_1, který je dán vztahem (168), dává podle dokázaného tvrzení stejné řešení. Takže můžeme psát: $L_1 = \frac{1}{2} m v^2 - e\varphi + e\vec{v}.\vec{A} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$. Funkce *f* obecně závisí na prostorových souřadnicích a na čase (tj. $f\left(x^i, t\right)$), takže s postupně prováděnými úpravami lze lagrangián L_1 psát ve tvaru

$$L_1 = \frac{1}{2} m v^2 - e\varphi + e\vec{v}.\vec{A} + \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^i} \dot{x}^i = \frac{1}{2} m v^2 - e\left(\varphi - \frac{1}{e}\frac{\partial f}{\partial t} \right) + e\vec{v}.\vec{A} + \vec{v}.\mathrm{grad}\, f =$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 - e\left(\varphi - \frac{1}{e}\frac{\partial f}{\partial t} \right) + e\vec{v}.\left(\vec{A} + \frac{1}{e}\mathrm{grad}\, f \right) = \frac{1}{2} m v^2 - e\varphi' + e\vec{v}.\vec{A}'.$$

Získali jsme tak tvar lagrangiánu, který dává stejné výsledky jako původní lagrangián, jestliže platí $\varphi' = \varphi - \frac{1}{e}\frac{\partial f}{\partial t}$ a $\vec{A}' = \vec{A} + \frac{1}{e}\operatorname{grad} f$.

Změnili jsme tedy dvě polní veličiny a lagrangián je vzhledem k této změně invariantní. Jedná se tedy o zvláštní případ lokální symetrie. V tomto případě mluvíme o tzv. **kalibrační transformaci**, vůči níž je lagrangián invariantní.

Maxwellovy rovnice zůstávají v platnosti a mají stejný tvar jako pro lagrangián *L*. Veličiny, které můžeme měřit (tj. veličiny $\vec{E}$ a $\vec{B}$) jsou také stejné (jak vyplývá z Mawellových rovnic).

Např. pro $\vec{B}$, $\vec{A}$ a $\vec{A}'$ platí: $\operatorname{rot}\vec{A}' = \operatorname{rot}\left(\vec{A} + \frac{1}{e}\operatorname{grad} f\right) = \operatorname{rot}\vec{A} + \frac{1}{e}\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B}$.

Podobným postupem fyzika vytváří nové teorie. Dbá se nejen na to, aby daná teorie odpovídala experimentálním měřením, ale také na to, aby splňovala kalibrační transformace. Tím se zjednoduší popis daného systémů v různých soustavách a teorie bude pro řešení úloh jednodušší.
