

# Formulace a důkaz Hamiltonových kanonických rovnic

## HAMILTONOVY KANONICKÉ ROVNICE JSOU ROVNICE VE TVARU

$$\frac{dq^j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \text{ a } \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^j} \quad (174)$$

**PRO  $j=1, 2, \dots, n$ , KDE  $n$  JE POČET STUPŇŮ VOLNOSTI DANÉHO SYSTÉMU.**

Na základě vhodně zavedeného [hamiltoniánu](#) (173) jsou Hamiltonovy kanonické rovnice jednoduché a symetrické. Tyto rovnice, které [lr](#) sir Rowan Hamilton odvodil v roce 1834, jsou soustavou  $2n$  obyčejných diferenciálních rovnic s neznámými  $q^j(t)$  a  $p_j(t)$  pro  $j=1, 2, \dots, n$ . Uvedený tvar rovnic vyplývá ze symplektické struktury [fázového prostoru](#), která zaručuje jednoznačný popis systému, správná znaménka v rovnicích, ...

Přesto, že se v zápise Hamiltonových rovnic objevují parciální derivace, jsou to rovnice obyčejné, tj. po úpravách budou obsahovat jen totální („normální“) derivace. Symbol  $\frac{\partial H}{\partial p_j}$  resp.  $\frac{\partial H}{\partial q^j}$  dává jen návod na sestavení pravé strany příslušné Hamiltonovy rovnice.

Nyní rovnice dokážeme; důkaz přitom provedeme dvakrát - jednou podle definice hamiltoniánu a podruhé pomocí [Hamiltonova variačního principu](#).

Začneme důkazem první Hamiltonovy rovnice, který provedeme na základě definice hamiltoniánu (173). Pravou stranu první Hamiltonovy rovnice tedy rozepíšeme podle definice hamiltoniánu (173) s vyznačením proměnných, na nichž závisí [zobecněná rychlost](#) a [lagrangián](#):

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i(q^k(t), p_k(t), t) - L(q^j(t), \dot{q}^i(q^k(t), p_k(t), t), t) \right).$$
 Nyní provedeme naznačenou derivaci

a argumenty funkcí kvůli větší přehlednosti již vypisovat nebudeme: 
$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial p_i}{\partial p_j} \dot{q}^i + p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} \right).$$

Derivace lagrangiánu podle  $p_j$  je rovna součtinu derivace lagrangiánu podle  $\dot{q}^i$  a derivace  $\dot{q}^i$  podle  $p_j$ , protože  $p_j$  je „schovaná“ právě v  $\dot{q}^i$  ( $\dot{q}^i$  závisí na  $p_j$ ). Proto lagrangián derivujeme jako složenou funkci.

S využitím definice [kanonické hybnosti](#) (172) můžeme pokračovat v úpravách:

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial p_i}{\partial p_j} \dot{q}^i + p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} - p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} \right) = \sum_{i=1}^n \delta_{ij} \dot{q}^i = \dot{q}^j = \frac{dq^j}{dt}$$
 a tím je platnost první Hamiltonovy kanonické rovnice dokázána.

Analogicky můžeme pokračovat v důkazu druhé Hamiltonovy rovnice:

$$\frac{\partial H}{\partial q^j} = \frac{\partial}{\partial q^j} \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i(q^k(t), p_k(t), t) - L(q^j(t), \dot{q}^i(q^k(t), p_k(t), t), t) \right).$$
 Po provedení derivace dostaneme

rovnici, v níž opět už nebudeme vypisovat argumenty funkcí: 
$$\frac{\partial H}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j}.$$
 Opět

s využitím vztahu (172) můžeme postupně psát 
$$\frac{\partial H}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} = -\frac{\partial L}{\partial q^j}.$$
 Vztah

$$\frac{\partial H}{\partial q^j} = -\frac{\partial L}{\partial q^j} \quad (175)$$

je sice zajímavý, ale zatím to není ten vztah, jehož platnost jsme měli dokázat. Navíc zatím jsme využívali pouze matematické úpravy výrazů bez fyzikálního náhledu. Ten využijeme nyní: pravou stranu rovnosti (175) vyjádříme pomocí [Lagrangeových rovnic druhého druhu](#) (47). Dostaneme tak

$$\frac{\partial H}{\partial q^j} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) = -\frac{dp_j}{dt} \quad (\text{druhá úprava byla provedena na základě definice kanonické hybnosti (172)}).$$

Tím jsme dokázali i druhou Hamiltonovu kanonickou rovnici.

Ve druhém kroku dokážeme Hamiltonovy kanonické rovnice pomocí Hamiltonova variačního principu. Důkaz nebudeme provádět v [Lagrangeově formalismu](#), ale v [Hamiltonově formalismu](#). Definiční vztah hamiltoniánu (173) upravíme na tvar

$$L = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}^j - H. \quad (176)$$

Vyjdeme z podmínky (130). V ní vystupuje [akce](#)  $S$ , kterou vyjádříme pomocí definice (131) s přihlédnutím k lagrangiánu ve tvaru (176). Dostaneme tedy  $0 = \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}^j - H \right) dt$ .

Výraz  $\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}^j - H \right) dt$  přitom můžeme interpretovat tak, že se zajímáme o změnu integrálu při změně funkcí, které integrujeme. Proto můžeme dále pokračovat v úpravách. Začneme diferencováním a dostaneme

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{j=1}^n \left( \delta p_j \dot{q}^j + p_j \delta \dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial q^j} \delta q^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right) - \frac{\partial H}{\partial t} \delta t \right) dt. \quad (177)$$

Člen  $\frac{\partial H}{\partial t} \delta t$  ve výrazu (177) je nulový, protože jsme se omezili na [izochronní variace](#). Dále upravíme výraz  $\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n p_j \delta \dot{q}^j dt$ , který je též částí výrazu (177). S využitím identity (136) a následným

použitím metody per-partes můžeme psát:  $\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n p_j \delta \dot{q}^j dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n p_j \frac{d}{dt} (\delta q^j) dt = \left[ p_j \delta q^j (t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \frac{dp_j}{dt} \delta q^j dt$ .

Vzhledem k tomu, že uvažujeme izochronní variace s pevnými konci, platí podmínka (132) a tedy  $\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n p_j \delta \dot{q}^j dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \frac{dp_j}{dt} \delta q^j dt$ . Nyní dosadíme do výrazu (177) a dostaneme

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left( \delta p_j \dot{q}^j - \frac{dp_j}{dt} \delta q^j - \frac{\partial H}{\partial q^j} \delta q^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right) dt. \quad \text{Po úpravě tedy máme}$$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left( \left( \dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j + \left( -\frac{dp_j}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \right) \delta q^j \right) dt. \quad (178)$$

Všechny variace  $\delta q^j$  a  $\delta p_j$  pro  $j=1, 2, \dots, n$  ze vztahu (178) jsou dovolené a navzájem nezávislé. To ovšem znamená, že vztah (178) je splněn pouze tehdy, když  $\dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0$  a  $-\frac{dp_j}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q^j} = 0$  pro  $j=1, 2, \dots, n$ . To je ovšem vyjádření Hamiltonových kanonických rovnic (174), jejichž platnost jsme chtěli dokázat.

Na základě podmínky (130) jsme tedy odvodili další pohybové rovnice. Pomocí Hamiltonova variačního principu jsme odvodili z podmínky (130) Lagrangeovy rovnice druhého druhu, nyní ze stejné podmínky Hamiltonovy kanonické rovnice. Podmínka (130) má tedy hlubší význam.

---

© **Encyklopedie Fyziky** (<http://fyzika.jreichl.com>); **Jaroslav Reichl, Martin Všetíčka**  
Licence <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> zakazuje úpravy a komerční distribuci.