Definice a základní vztahy kanonických transformací

KANONICKÁ TRANSFORMACE JE KAŽDÁ ZMĚNA SOUŘADNIC FÁZOVÉHO PROSTORU (PARAMETRŮ FÁZOVÉHO PROSTORU), KTERÁ ZACHOVÁVÁ STRUKTURU HAMILTONOVÝCH KANONICKÝCH ROVNIC.

To znamená, že po kanonické transformaci budou mít Hamiltonovy kanonické rovnice (174) stejný tvar jako před ní.

Označíme-li původní zobecněné souřadnice q^j a původní kanonické hybnosti p_j a označíme-li dále nové zobecněné souřadnice Q^j a nové kanonické hybnosti P_j, tak pak požadujeme, aby funkce

$$Q^j = Q^j\left(q^i, p_i, t\right) \text{ a } P_j = P_j\left(q^i, p_i, t\right) \tag{206}$$

splňovaly Hamiltonovy kanonické rovnice ve tvaru

$$\frac{dQ^j}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P_j} \text{ a } \frac{dP_j}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial Q^j} \tag{207}$$

pro hamiltonián $H' = H'\left(Q^j, P_j, t\right)$.

Splnění těchto požadavků není triviální, neboť kanonických transformací je velmi málo. Jsou ale velmi důležité pro další počítání a pro zobecnění do dalších oborů fyziky.

Při konstrukčním důkazu kanonické transformace vyjdeme ze vztahu (168). Ten definuje Lagrangeovu funkci L_1, na základě níž lze odvodit stejné pohybové rovnice jako z Lagrangeovy funkce *L*. Nyní přepíšeme vztah (168) ve tvaru $L_1 = L + \frac{dF}{dt}$, kde *F* je libovolná hladká funkce, která závisí na původních zobecněných souřadnicích nebo kanonických hybnostech a na kalibrační transformací nově definovaných proměnných. Jsou tedy celkem čtyři možnosti, na jakých proměnných může funkce *F* záviset:

1. $F_1 = F_1\left(q^j, Q^j, t\right)$;
2. $F_2 = F_2\left(q^j, P_j, t\right)$;
3. $F_3 = F_3\left(p_j, Q^j, t\right)$;
4. $F_4 = F_4\left(p_j, P_j, t\right)$.

Funkce F_1, F_2, F_3 a F_4 se nazývají **generující funkce** kanonické transformace. Pomocí Hamiltonova variačního principu a s využitím podmínky (130) (variace akce je nulová) lze získat podmínky, za kterých je transformace popsaná jednou ze čtyř výše uvedených funkcí kanonická. Tímto způsobem lze pro každou z výše uvedených funkcí získat tzv. **podmínky kanoničnosti**, tj. nutné a postačující podmínky, které musí být splněny, aby daná transformace byla kanonická (viz tab. 1).

Třetí sloupec tab. 1 získáme tak, že každou rovnici ze druhého sloupce daného řádku derivujeme podle proměnné, podle níž se derivuje druhá z rovnic ve druhém sloupci tabulky. Např. pro první řádek derivujeme rovnici $\frac{\partial F_1}{\partial q^i} = p_i$ podle Q^k a rovnici $\frac{\partial F_1}{\partial Q^k} = -P_k$ podle q^i a získáme: $\frac{\partial}{\partial Q^k}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q^i}\right) = \frac{\partial p_i}{\partial Q^k}$ a $\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial F_1}{\partial Q^k}\right) = -\frac{\partial P_k}{\partial q^i}$. Při záměnnosti parciálních derivací platí: $\frac{\partial p_i}{\partial Q^k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q^i}$. Důležité je, aby derivované proměnné byly vyjádřeny ve správných proměnných, tj. v proměnných, v jakých je vyjádřena v tomto případě funkce F_1 (obecně funkce z daného řádku tabulky).

Generující funkce	Podmínky kanoničnosti	Podmínky integrability

$F_1 = F_1\left(q^j, Q^j, t\right)$	$\frac{\partial F_1}{\partial q^i} = p_i$ $\frac{\partial F_1}{\partial Q^k} = -P_k$	$\frac{\partial p_i}{\partial Q^k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q^i}$
$F_2 = F_2\left(q^j, P_j, t\right)$	$\frac{\partial F_2}{\partial q^i} = p_i$ $\frac{\partial F_2}{\partial P_k} = Q^k$	$\frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial Q^k}{\partial q^i}$
$F_3 = F_3\left(p_j, Q^j, t\right)$	$\frac{\partial F_3}{\partial p_i} = -q^i$ $\frac{\partial F_3}{\partial Q^k} = -P_k$	$\frac{\partial q^i}{\partial Q^k} = \frac{\partial P_k}{\partial p_i}$
$F_4 = F_4\left(p_j, P_j, t\right)$	$\frac{\partial F_4}{\partial p_i} = -q^i$ $\frac{\partial F_4}{\partial P_k} = Q^k$	$\frac{\partial q^i}{\partial P_k} = -\frac{\partial Q^k}{\partial p_i}$

tab. 1

Derivace ve druhém sloupci tab. 1 se počítají podle proměnných, na kterých závisí daná generující funkce. Přitom platí: derivace podle jedné původní proměnné je rovna druhé původní proměnné (např. $\frac{\partial F_2}{\partial q^i} = p_i$) a derivace podle jedné nové proměnné je rovna druhé nové proměnné (např. $\frac{\partial F_3}{\partial Q^k} = -P_k$). Znaménko mínus je u původní zobecněné souřadnice a u nové kanonické hybnosti.

Dále platí $H'\left(Q^j, P_j, t\right) = H\left(q^j, p_j, t\right) + \frac{\partial F_a}{\partial t}$ pro $a = 1, 2, 3, 4$ a pro $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$.

Pro ověření faktu, zda daná transformace je či není kanonická, stačí ověřit vztahy z jednoho řádku tab. 1.

Důkaz vztahů uvedených v tab. 1 lze provést rozpisem lagrangiánu a hamiltoniánu daného fyzikálního systému. Pro funkci F_1 můžeme na základě vztahu (168) psát

$$L_1\left(q^j, p_j, t\right) = L\left(Q^j, P_j, t\right) + \frac{\mathrm{d}F_1\left(q^j, Q^j, t\right)}{\mathrm{d}t}. \tag{208}$$

Je-li právě uvedeným předpisem lagrangián definovaný v každém čase *t* a získáme-li variací příslušných akcí ve fázovém prostoru stejné pohybové rovnice v původních souřadnicích i v nových souřadnicích, je uvažovaná transformace popsaná generující funkcí F_1 kanonická.

Dosazením vztahu (176) (vyjádření lagrangiánu pomocí hamiltoniánu) do vztahu (208) získáme: $\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}^i - H\left(q^j, p_j, t\right) = \sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}^i - H'\left(Q^j, P_j, t\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F_1}{\partial Q^i}\dot{Q}^i\right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$. Přeuspořádáním členů tohoto výrazu dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i - \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q^i}\right)\dot{Q}^i\right) = H\left(q^j, p_j, t\right) - H'\left(Q^j, P_j, t\right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{209}$$

Vztah (209) je identicky splněn, pokud $p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q^i}$, $\frac{\partial F_1}{\partial Q^i} = -P_i$ a $H'\left(Q^j, P_j, t\right) = H\left(q^j, p_j, t\right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$, což jsou vztahy, jejichž platnost jsme měli dokázat.

Důkaz pro funkci F_2 je podobný. Analogicky jako pro funkci F_1, můžeme i pro funkci F_2 napsat vztah

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i - H\left(q^j, p_j, t\right) = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}^i - H'\left(Q^j, P_j, t\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_2}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \tag{210}$$

ve kterém jsou ve srovnání se vztahem (209) jen jiné parciální derivace funkce F_2, neboť funkce F_2 závisí na proměnných q^j, P_j a t. Nyní bychom potřebovali (stejně jako v předchozí části důkazu) porovnat koeficienty u $\dot{Q}^i$ a $\dot{P}_i$. Využijeme tedy toho, že přičtením úplné časové derivace funkce k lagrangiánu se popis systému nezmění (viz vztah (168)). Určitě platí identita

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i Q^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dot{P}_i Q^i + \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}^i, \tag{211}$$

kterou můžeme dosadit do vztahu (210) a dostaneme tak $\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i - H\left(q^j, p_j, t\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i Q^i\right) - \sum_{i=1}^{n} \dot{P}_i Q^i - H'\left(Q^j, P_j, t\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_2}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$ a po přerovnání členů získáme vztah $\sum_{i=1}^{n}\left(\left(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i - \left(\frac{\partial F_2}{\partial P_i} - Q^i\right)\dot{P}_i\right) = H\left(q^j, p_j, t\right) - H'\left(Q^j, P_j, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i Q^i\right)$, který je splněn pro $\frac{\partial F_2}{\partial q^i} = p_i$, $\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q^i$ a $H'\left(Q^j, P_j, t\right) = H\left(q^j, p_j, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i Q^i\right)$. Poslední rovnost můžeme s využitím vztahů (168) a (176) psát ve tvaru $H'\left(Q^j, P_j, t\right) = H\left(q^j, p_j, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$, čímž jsme získali sérii vztahů, jejichž platnost jsme chtěli ukázat.

Lagrangián ani hamiltonián daného fyzikálního systému se nezmění, jestliže k němu přičteme úplnou časovou derivaci funkce. A výraz $\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i Q^i\right)$ je úplnou časovou derivací funkce.

Důkazy pro funkce F_3 a F_4 by byly analogické.