Vlastnosti kanonických transformací

Kanonické transformace mají některé zajímavé vlastnosti, které jsou užitečné i při řešení úloh.

Generující funkce F_1, F_2, F_3 a F_4 kanonické transformace nejsou nezávislé, ale jsou navzájem svázány Legendreovou duální transformací. Tu odvodil francouzský matematik Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833), který se zabýval hlavně statistikou, teorií čísel, algebrou a matematickou analýzou.

Vzájemná provázanost funkcí F_1, F_2, F_3 a F_4, z nichž funkce F_1 je dána (resp. určena výpočtem), je popsána těmito vztahy

$$F_2 = F_1 + \sum_{i=1}^{n} P_i Q^i \, , \quad F_3 = F_1 - \sum_{i=1}^{n} p_i q^i \quad \text{a} \quad F_4 = F_1 - \sum_{i=1}^{n} P_i Q^i - \sum_{i=1}^{n} p_i p^i \, . \qquad (212)$$

Místo toho, že všechny další funkce budeme vyjadřovat pomocí funkce F_1 (vztahy (212)), lze vyjádřit zbývající funkce např. pomocí funkce F_2.

Na kterém řádku tab. 1 začneme s vyjadřováním, je jedno. Všechny její řádky jsou navzájem ekvivalentní.

Vztahy (212) jsou analogické vztahům, které v termodynamice popisují přechody mezi jednotlivými potenciály popisujícími daný fyzikální systém.

Další vlastností, na základě které se práce s kanonickými transformacemi zjednoduší, je skutečnost, že tyto transformace tvoří grupu.

KANONICKÉ TRANSFORMACE TVOŘÍ GRUPU.

Jakmile o nějaké struktuře dokážeme, že tvoří grupu, je okamžitě jasné, že musí splňovat základní vlastnosti, které grupa prostě mít musí. Tak se mnohdy zjednoduší i fyzikální pohled na danou problematiku. Z faktu, že kanonické transformace tvoří grupu, vyplývá:

1. existence jednotkového prvku;

To je transformace, která nedělá nic - původní zobecněné souřadnice a kanonické hybnosti se nezmění.

2. existence inverzního prvku;
3. možnost skládání kanonických transformací.

Identita je generována funkcí $F_2 = \sum_{j=1}^{n} P_j q^j$. Na základě tab. 1 dostáváme $\frac{\partial F_2}{\partial q^i} = p_i$ a $\frac{\partial F_2}{\partial P_k} = Q^k$ a výpočtem derivací podle předpisu funkce F_2 máme $\frac{\partial F_2}{\partial q^i} = P_i$ a $\frac{\partial F_2}{\partial P_k} = q^k$. Transformace popsaná funkcí F_2 je tedy kanonická, jestliže platí $p_i = P_i$ a zároveň $q^k = Q^k$. Neexistuje funkce F_1 ani funkce F_4, které by generovaly identitu. Vztahy (212) sice platí obecně, ale nemusí platit u některých výjimečných kanonických transformací - např. u identity.