Ověřování kanoničnosti transformace

Existuje několik postupů, jak ověřit, zda daná transformace je či není kanonická transformace. Různé postupy jsou přitom u různých úloh různě náročné, a proto nelze doporučit jediný nevhodnější postup, který vede rychle a bez větších technických komplikací ke zdárnému cíli. Náročnost každého z postupů závisí na konkrétních transformačních vztazích, jejichž kanoničnost se má ověřit.

Z řady postupů uvedeme dva, které se používají nejčastěji:

1. pomocí tab. 1, v níž jsou přehledně sepsány generující funkce kanonických transformací - postup spočívá v ověření platnosti třetího sloupce (libovolného řádku) tabulky. Funkce, s nimiž pracujeme, musí být ovšem vyjádřeny ve správné kombinaci poměných q^j, p_j, Q^j, P_j. Druhý sloupec téhož řádku tabulky poskytuje návod na nalezení generující funkce *F*.

Správná kombinace proměnných vyplývá z proměnných, které vystupují v argumentu funkce *F* na daném řádku tabulky. Více - viz příklad v tomto odstavci.

2. pomocí Poissonových závorek - transformace je totiž kanonická tehdy, pokud současně platí vztahy

$$\left\{Q^i, P_j\right\} = \delta^i_j,\ \left\{Q^i, Q^j\right\} = 0 \text{ a } \left\{P_i, P_j\right\} = 0. \qquad (213)$$

Použití metody Poissonových závorek může být technicky náročnější: je-li počet stupňů volnosti systému roven dvěma, znamená to ověřit šest Poissonových závorek (ostatní jsou nulové).

Vztahy (213) jsou analogií ke vztahům (204). Pro identickou kanonickou transformaci platí jak vztahy (204), tak vztahy (213). Pro ostatní kanonické transformace platí vztahy (213).

Příklad: Kanonická transformace

Uvažujme transformaci danou vztahy $Q = \alpha q + \beta p$ a $P = \gamma q + \delta p$, kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. Pro které kombinace konstant α, β, γ a δ je transformace kanonická?

Řešení: Postup řešení ukážeme na obou výše uvedených postupech.

Podle prvního postupu vybereme např. čtvrtý řádek tab. 1, na kterém je generující funkce $F_4 = F_4(p, P)$ (zadané transformační vztahy nejsou závislé na čase, a tedy ani generující funkce není závislá na čase). Nyní je tedy nutné vyjádřit zbývající proměnné (tj. *q* a *Q*) pomocí stejných proměnných, na kterých závisí funkce F_4, tj. pomocí *p* a *P*. Ze zadaných transformačních vztahů můžeme psát: $q = \frac{1}{\gamma}(P - \delta p)$ a dosazením do prvního vztahu dostaneme $Q = \frac{\alpha}{\gamma}(P - \delta p) + \beta p = \frac{\alpha}{\gamma}P + \frac{1}{\gamma}(\beta\gamma - \delta\alpha)p$. Podle třetího slupce čtvrtého řádku tabulky určíme $\frac{\partial q}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{\gamma}(P - \delta p)\right) = \frac{1}{\gamma}$ a $-\frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\alpha}{\gamma}P + \frac{1}{\gamma}(\beta\gamma - \alpha\delta)p\right) = -\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma}$. Nyní zbývá určit, za jakých podmínek bude platit $\frac{\partial q}{\partial P} = -\frac{\partial Q}{\partial p}$. Je zřejmé, že tato rovnost bude splněná pouze tehdy, pokud $\frac{1}{\gamma} = -\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma}$, tj. pokud $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. A to je podmínka, za které budou zadané transformační vztahy popisovat kanonickou transformaci. Kanonických transformací je tedy málo (je to unikátní typ transformace), protože z velkého počtu možností pro koeficienty α, β, γ a δ kanonické transformaci vyhovují jen ty možnosti, které splňují podmínku $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Při ověřování pomocí Poissonových závorek stačí v tomto případě ověřit platnost vztahu $\{Q, P\} = 1$, protože ostatní ze vztahů (213) jsou splněny. Bude-li platit $\{Q, P\} = 1$, pak je transformace kanonická. Podle definice Poissonových závorek můžeme psát $\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$. Po dosazení ze zadaných transformačních vztahů dostáváme: $\{Q, P\} = \alpha\delta - \beta\gamma$. Rovnost $\{Q, P\} = 1$ je splněna pouze tehdy, pokud $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, což je stejná podmínka, kterou jsme získali při řešení pomocí tabulky generujících funkcí.

V souvislosti s kanonickými transformacemi platí ještě další dvě důležité věty.

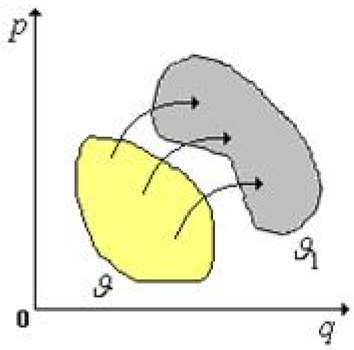
POISSONOVY ZÁVORKY JSOU INVARIANTNÍ VŮČI KANONICKÝM TRANSFORMACÍM, TJ. PRO KAŽDÉ DVĚ FUNKCE $f\left(q^j, p_j, t\right)$ A $g\left(q^j, p_j, t\right)$ FÁZOVÉHO PROSTORU PLATÍ:

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}, \text{ tj. } \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q^j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q^j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial Q^j}\frac{\partial g}{\partial P_j} - \frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial g}{\partial Q^j}\right). \qquad (214)$$

Důkaz tohoto tvrzení je zřejmý a vyžaduje ověření rozpisu Poissonových závorek podle jejich definice s přihlédnutím k transformačním vztahům kanonické transformace.

OBJEM FÁZOVÉHO PROSTORU SE PŘI KANONICKÉ TRANSFORMACI NEZMĚNÍ.

Schématicky je situace zobrazena na obr. 57, na kterém je šipkami naznačena transformace systému. Právě uvedené tvrzení si lze představit tak, že obsah plochy, která je vymezená ve fázovém prostoru, se kanonickou transformací nezmění. Může se změnit tvar plochy, ale nikoliv její obsah.



Obr. 57

Důkaz vychází z výpočtu objemu fázového prostoru pomocí integrálního počtu: $V = \iint_{\vartheta} \mathrm{d}Q\mathrm{d}P = \iint_{\vartheta} J\mathrm{d}q\mathrm{d}p$, kde $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix}$ je Jacobiho determinant (tzv. jacobián), který je do výpočtu integrálu zahrnut proto, že popisuje zobecnění věty o substituci pro vícerozměrné integrály. Pro výpočet determinantu matice druhého řádu platí: $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$. Na základě definice Poissonových závorek můžeme psát $J = \{Q, P\}$. Pro kanonickou transformaci přitom podle vztahů (213) platí $\{Q, P\} = 1$. To znamená, že jacobián kanonické transformace je roven jedné, tedy $V = \iint_{\vartheta} \mathrm{d}Q\mathrm{d}P = \iint_{\vartheta} J\mathrm{d}q\mathrm{d}p = \iint_{\vartheta} \mathrm{d}q\mathrm{d}p$.

Pro plnou korektnost důkazu by bylo nutné rozebrat, jak se mění při kanonické transformaci množina ϑ.