

## Zavedení úhlové rychlosti

Uvažujme libovolný časově závislý vektor  $\vec{w}(t)$ , který budeme zkoumat jak v [pevné bázi](#)  $\{\vec{e}_i\}$ , tak v [korotující bázi](#)  $\{\vec{e}'_i(t)\}$ .

Korotující báze  $\{\vec{e}'_i(t)\}$  je skutečně závislá na čase, neboť rotuje spolu s [tuhým tělesem](#).

[Souřadnice](#)  $w_i(t)$  resp.  $w'_i(t)$  vektoru  $\vec{w}(t)$  můžeme vyjádřit v obou uvažovaných [bázích](#) pomocí vztahů

$$\vec{w}(t) = w_i(t) \vec{e}_i \quad (229)$$

resp.

$$\vec{w}(t) = w'_i(t) \vec{e}'_i(t). \quad (230)$$

Ve vztahu (230) se mění v závislosti na čase jak souřadnice uvažovaného vektoru, tak vektory korotující báze. Pro bázevé vektory obou bází přitom platí vztahy

$$\vec{e}'_i(t) = A_{ik}(t) \vec{e}_k \quad \text{a} \quad \vec{e}_k(t) = A_{jk}(t) \vec{e}'_j \quad (231)$$

a dále platí

$$A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij}. \quad (232)$$

Vztahy (231) a (232) jsou analogické jako vztahy (226) a (227) jsou jen přepsány ve vhodných indexech pro další odvozování. Pro časovou změnu vektoru  $\vec{w}(t)$  vůči pevnému inerciálnímu systému můžeme postupně psát:

$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{dw_i(t)}{dt} \vec{e}_i = \frac{dw'_i(t)}{dt} \vec{e}'_i(t) + w'_i(t) \frac{d\vec{e}'_i(t)}{dt}. \quad (233)$$

Vektor  $\vec{w}(t)$  popisujeme vzhledem k pevnému inerciálnímu systému, ale vyjádřili jsme ho jak z hlediska pevné báze, tak z hlediska korotující báze.

Byly by další dvě možnosti, jak situaci vyšetřovat: definovat vektor vzhledem k soustavě, která se pohybuje spolu s tuhým tělesem a vyjádřit ho jak v korotující bázi (její vektory by se v čase neměnily), tak v pevné bázi, jejíž vektory by se tentokrát měnily. [Vztažná soustava](#) by se totiž vůči pevné bázi pohybovala.

S využitím obou vztahů (231), můžeme vztah (233) přepsat ve tvaru  $\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{dw'_i(t)}{dt} \vec{e}'_i(t) + w'_i(t) \frac{dA_{ik}(t)}{dt} \vec{e}_k = \frac{dw'_i(t)}{dt} \vec{e}'_i(t) + w'_i(t) \frac{dA_{ik}(t)}{dt} A_{jk}(t) \vec{e}'_j$ . Dostáváme tedy vztah

$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{dw'_i(t)}{dt} \vec{e}'_i(t) + w'_i(t) \Omega_{ij}^t \vec{e}'_j, \quad (234)$$

v němž jsme označili

$$\Omega_{ij}^t = \frac{dA_{ik}}{dt} A_{jk}. \quad (235)$$

Vztah (235) lze též zapsat v ekvivalentním tvaru

$$\Omega = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{A}^T; \quad (236)$$

zavedli jsme tedy matici  $\Omega$  s prvky  $\Omega'_{ij}$  definovanými vztahem (235).

Důvod, proč je matice značená bez čárky a její prvky s čárkou, bude vysvětlen později.

Lze vyslovit následující tvrzení:

**MATICE  $\Omega$  JE ANTISYMETRICKÁ.**

Toto tvrzení snadno dokážeme. Prvky matice  $\Omega$  splňují relace ortogonality (232), neboť na základě nich byla matice  $\Omega$  odvozena. Časovou derivací vztahu (232) dostaneme  $\frac{dA_{jk}}{dt} A_{jk} + A_{jk} \frac{dA_{jk}}{dt} = 0$ , odkud vyjádříme  $\frac{dA_{jk}}{dt} A_{jk} = -A_{jk} \frac{dA_{jk}}{dt}$ . Vzhledem k symetričnosti matice  $\mathbf{A}$  můžeme psát  $\frac{dA_{jk}}{dt} A_{jk} = -\frac{dA_{kj}}{dt} A_{kj}$  a na základě vztahu (235) dostaneme  $\Omega'_{ij} = -\Omega'_{ji}$ , což znamená, že matice  $\Omega$  je antisymetrická a má tedy jen tři nezávislé prvky. Podle právě odvozeného vztahu je zřejmé, že na hlavní diagonále matice  $\Omega$  jsou nuly, takže zbývá určit její tři nezávislé prvky. Ostatní tři jsou již jednoznačně určeny - jsou to opačná čísla k číslům vyjadřující ony tři nezávislé prvky uvažované matice.

Proto můžeme provést tzv. přirozené mapování (přirozené zobrazení, operaci duality), při kterém antisymetrické matici přiřadíme vektor  $\vec{\Omega}$  se složkami:

$$\Omega'_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega'_{jk}, \quad (237)$$

kde  $\varepsilon_{ijk}$  je Lewi-Civitův symbol (Lewi-Civitův tenzor). Provedeme-li naznačený součet podle proměnné  $k$ , dostaneme

$$\vec{\Omega} = (\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3) = (\Omega'_{23}, -\Omega'_{13}, \Omega'_{12}). \quad (238)$$

Pro  $i$ -tou složku vektoru  $\vec{\Omega}$  můžeme totiž psát  $\Omega'_i = \frac{1}{2} (\varepsilon_{i12} \Omega'_{12} + \varepsilon_{i13} \Omega'_{13} + \varepsilon_{i21} \Omega'_{21} + \varepsilon_{i23} \Omega'_{23} + \varepsilon_{i31} \Omega'_{31} + \varepsilon_{i32} \Omega'_{32})$ , přičemž jsme nepsali ty členy, které rovnou obsahují dva stejné indexy (např.  $\varepsilon_{22} \Omega'_{22}$ ). Lewi-Civitiův symbol, který má dva indexy stejné, je totiž nulový.

Vektor  $\vec{\Omega}$  definovaný vztahem (237) je **vektor úhlové rychlosti otáčení tuhého tělesa**.

K vektoru  $\vec{\Omega}$  je nutné uvést několik poznámek:

1.  $\vec{\Omega}$  je duální pseudovektor a to proto, že přirozené mapování provedené vztahem (237) (tj. definice jednotlivých složek vektoru  $\vec{\Omega}$ ) není jednoznačné: při změně levotočivé báze na pravotočivou bázi (nebo naopak) se změní znaménka jeho souřadnic. Tato změna znamének by ale neměla nastávat často - ve fyzice se k popisu pohybujících se **hmotných bodů** a těles používá levotočivý kartézský systém souřadnic (tj. ten, který má osy  $x$ ,  $y$  a  $z$  orientovány podle **pravidla pravé ruky**). Skutečnost, že  $\vec{\Omega}$  je pseudovektor vyplývá z toho, že i Levi-Civitův symbol  $\varepsilon_{ijk}$  je pseudovektor.
2. Přiřazení pomocí vztahu (237) lze korektně provést jen ve trojrozměrném prostoru, neboť matice  $\Omega$  má tři nezávislé prvky a vektor  $\vec{\Omega}$  má také tři nezávislé složky.

V teorii relativity, v **teorii elektromagnetického pole** a dalších oborech fyziky je nutné

popisované přiřazení provést tak, že matici přiřadíme matici (nikoliv vektor).

3. Vektor  $\vec{\omega}$  má složky definované vůči korotující bázi  $\{\vec{e}_i^t\}$ , proto jsou jeho složky i prvky matice  $\Omega$  označeny symboly  $\Omega_i^t$  resp.  $\Omega_{ij}^t$ .

Tím je vysvětlen zdánlivý rozpor ve značení ve vztazích (235) a (236).

Analogicky lze vytvořit z vektoru matici, tj. napsat ke vztahu (237) duální vztah ve tvaru

$$\Omega_{ik}^t = \varepsilon_{ijk} \Omega_j^t. \quad (239)$$

Ve vztahu (239) ve srovnání se vztahem (237) chybí činitel 0,5. To proto, že na levé straně vztahu (239) je [veličina](#) indexovaná dvěma indexy a existuje tedy jediná možnost přiřazení.

Nyní budeme pokračovat v úpravě vztahu (234), ve kterém nejdříve provedeme záměnu indexů:

$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{dw_1^t(t)}{dt} \vec{e}_1^t + w_1^t(t) \Omega_{ij}^t \vec{e}_j^t = \frac{dw_1^t(t)}{dt} \vec{e}_1^t + w_1^t(t) \Omega_{ji}^t \vec{e}_1^t.$$

Tato úprava se používá proto, aby se zpřehlednil zápis daného vztahu nebo aby se sjednotilo značení indexů u veličin, které spolu souvisejí.

Dosazením ze vztahu (239) získáme  $\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{dw_1^t(t)}{dt} \vec{e}_1^t + w_1^t(t) \varepsilon_{ijk} \Omega_k^t \vec{e}_i^t$ . Provedením cyklické záměny indexů Levi-Civita symbolu dostaneme  $\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{dw_1^t(t)}{dt} \vec{e}_1^t + \varepsilon_{ikl} \Omega_k^t w_1^t(t) \vec{e}_i^t$ . Souřadnici  $w_1^t(t)$  vektoru  $\vec{w}$  můžeme v daném součinu umístit na jakékoliv místo, neboť  $w_1^t(t)$  je složka vektoru (tedy číslo). Další úpravou je využití definice [vektorového součinu](#):

$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{dw_1^t(t)}{dt} \vec{e}_1^t + (\vec{\omega} \times \vec{w})_1^t \vec{e}_1^t. \quad (240)$$

Tento vztah popisuje časovou derivaci libovolného vektoru  $\vec{w}$  vzhledem ke zvolenému inerciálnímu systému v prostoru vyjádřenou v korotující bázi  $\{\vec{e}_i^t\}$ . V právě uvedeném vztahu popisuje člen  $\frac{dw_1^t(t)}{dt} \vec{e}_1^t$  změnu vektoru  $\vec{w}$ , jehož souřadnice jsou definovány vztahy (229) a (230), vůči korotující bázi  $\{\vec{e}_i^t\}$  a člen  $(\vec{\omega} \times \vec{w})_1^t \vec{e}_1^t$  odpovídá přechodu mezi dvěma bázemi při popisu uvažovaného tuhého tělesa rotujícího úhlovou rychlostí  $\vec{\omega}$ .

Platí-li daný vztah mezi určitými vektory v jedné bázi, platí v každé bázi. Proto můžeme psát

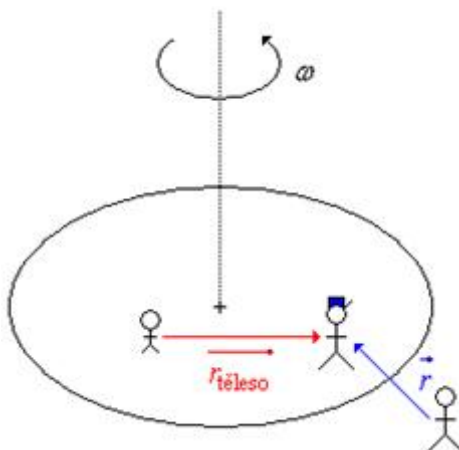
$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{d\vec{w}_{\text{těleso}}(t)}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{w} \quad (241)$$

bez ohledu na konkrétní bázi.

Tento vztah je velmi důležitý, a proto vyžaduje několik komentářů:

1.  $\frac{d\vec{w}}{dt}$  a  $\frac{d\vec{w}_{\text{těleso}}}{dt}$  jsou dva různé vektory, nikoliv jeden vektor vyjádřený v různých bázích;
2. pokud zvolíme  $\vec{w} = \vec{r}$ , kde  $\vec{r}$  je polohový vektor popisující polohu objektu na rotujícím tuhém tělesu, pak člen  $\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  definuje [rychlost pohybu](#) hmotného bodu na tuhém tělese vůči vnějšímu pozorovateli;
3. při stejné volbě pak člen  $\frac{d\vec{w}_{\text{těleso}}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{\text{těleso}}}{dt}$  definuje rychlost pohybu hmotného bodu na

tuhém tělese vůči tomuto tuhému tělesu



Obr. 60

Můžeme si představit situaci zobrazenou na obr. 60. Po kolotoči se pohybuje technik a jeho pohyb pozoruje dítě na kolotoči i pozorovatel mimo kolotoč. Dítě na kolotoči vnímá pouze vlastní pohyb technika vůči kolotoči (popsaný výrazem  $\frac{d\vec{w}_{\text{těleso}}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{\text{těleso}}}{dt}$ ), zatímco pozorovatel zvenčí vidí [rotační pohyb](#) technika na kolotoči: k tomu, co pozoruje dítě musí přidat ještě oběžný pohyb kolotoče (člen  $\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  ve výrazu (241)).

Kolotoč zobrazený na obr. 60 představuje speciální otáčení: otáčení s pevnou osou ([rotace](#) s pevnou osou).

---

© **Encyklopedie Fyziky** (<http://fyzika.jreichl.com>); **Jaroslav Reichl, Martin Všeticka**

Licence <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> zakazuje úpravy a komerční distribuci.