

Skládání rotací a vektorů úhlových rychlostí

OTÁČENÍ TĚLESA NENÍ OBECNĚ KOMUTATIVNÍ, ALE SKLÁDÁNÍ ÚHLOVÝCH RYCHLOSTÍ KOMUTATIVNÍ JE: VEKTORY ÚHLOVÝCH RYCHLOSTI SE SKLÁDAJÍ LINEÁRNĚ.

Úhlové rychlosti se tedy skládají jako „normální“ vektory.

Provedeme důkaz uvedeného tvrzení. Uvažujme první ortogonální matici \mathbf{A} , která je maticí přechodu od báze $\{\vec{e}_k\}$ k bázi $\{\vec{e}_i^A\}$ a popisuje první otočení tuhého tělesa. To znamená, že platí transformační vztah (226). Dále uvažujme druhou ortogonální matici \mathbf{B} popisující druhé otočení tuhého tělesa, kterou lze považovat za matici přechodu od báze $\{\vec{e}_i^A\}$ k bázi $\{\vec{e}_j^B\}$ definovanou vztahem

$$\vec{e}_j^B = B_{ji} \vec{e}_i^A. \quad (244)$$

Složením obou otočení získáme

$$\vec{e}_j^B = B_{ji} \vec{e}_i^A = B_{ji} A_{ik} \vec{e}_k = C_{jk} \vec{e}_k, \quad (245)$$

kde matice \mathbf{C} je definována vztahem

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (246)$$

Vzhledem k tomu, že násobení matic není obecně komutativní, není obecně komutativní ani skládání otočení tuhého tělesa.

Nyní dokážeme, že vektory úhlové rychlosti se skládají lineárně. Vyjdeme z definice (236) matice Ω a pro matici Ω^C popisující úhlovou rychlost otáčení tuhého tělesa charakterizovanou maticí \mathbf{C} můžeme psát $\Omega^C = \frac{d\mathbf{C}}{dt} \mathbf{C}^T$. S využitím vztahu (246) dále postupnými úpravami dostáváme

$\Omega^C = \frac{d(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})}{dt} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^T = \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T = \frac{d\mathbf{B}}{dt} \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T$. Ze vztahu (228) vyplývá, že $\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$, kde \mathbf{E} je jednotková matice. Proto můžeme dále psát $\Omega^C = \frac{d\mathbf{B}}{dt} \mathbf{B}^T + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T = \Omega^{B'} + \mathbf{B} \Omega^A \mathbf{B}^T$. V poslední úpravě jsme využili opět definiční vztah matice $\Omega^{B'}$ resp. Ω^A . Uvědomíme-li si, že matice $\mathbf{B} \Omega^A \mathbf{B}^T$ popisuje transformaci matice \mathbf{A} z báze $\{\vec{e}_i^A\}$ do báze $\{\vec{e}_j^B\}$, můžeme napsat finální vztah ve tvaru

$$\Omega^C = \Omega^{B'} + \Omega^A. \quad (247)$$

Čárky v indexech u matic konkretizují, v jaké bázi je příslušná matice definována.

Obecně tedy pro vektory úhlové rychlosti popisující otáčení tuhého tělesa kolem různých os platí

$$\Omega^C = \Omega^B + \Omega^A. \quad (248)$$