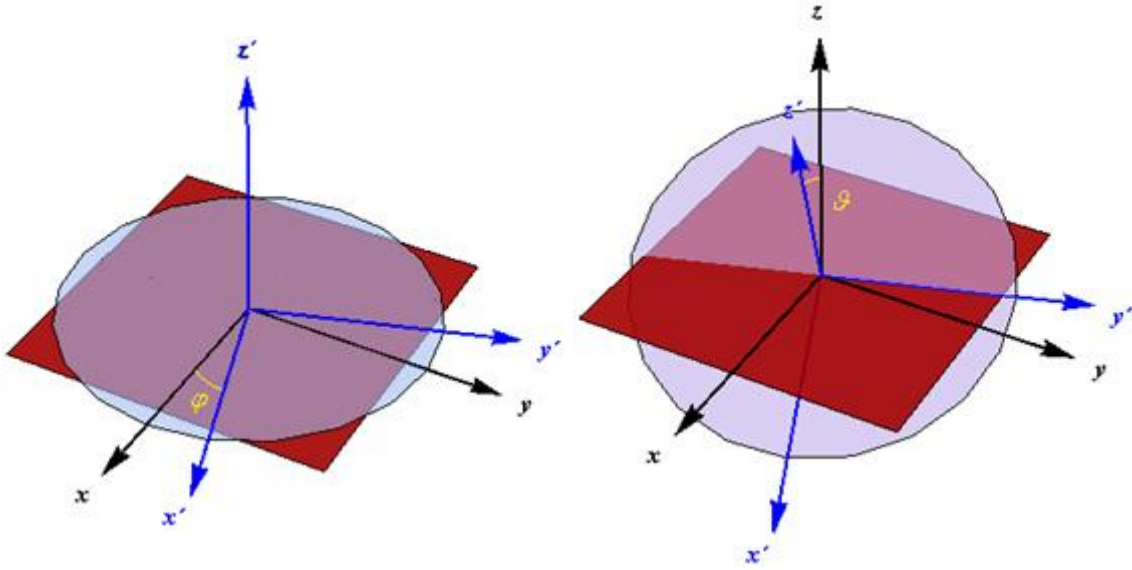


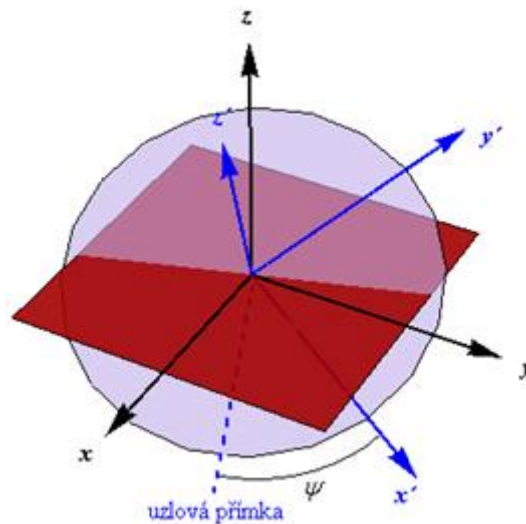
Popis rotace tuhého tělesa - Eulerovy kinematické rovnice

Pro korektní popis rotace [tuhého tělesa](#) (resp. natočení tuhého tělesa) kolem dané osy je nutné zavést tři nezávislé parametry. Počet těchto parametrů vyplývá ze symetrie [matice ortogonality](#). Těmito třemi parametry jsou tzv. Eulerovy úhly, jejichž funkce pak vystupují v matici ortogonality \mathbf{A} a v matici $\mathbf{\Omega}$ definující [úhlovou rychlost](#) otáčení tuhého tělesa. Budeme postupovat tak, abychom dokázali, že libovolné natočení tuhého tělesa lze složit ze tří otočení kolem vhodných os. A každé z těchto tří otočení je popsáno jedním z Eulerových úhlů.



Obr. 61

Obr. 62



obr. 63

[Uzlová přímka](#) zobrazená na obr. 63 vyznačuje původní polohu osy x' z obr. 62.

Švýcarský matematik a fyzik Leonhard Paul Euler (1707 - 1783) se snažil popsat [setrvačníky](#), a proto volil úhly popisující rotaci setrvačníku (a obecně tuhého tělesa) takto:

1. [precesní úhel](#) φ - charakterizuje otočení kolem osy z (resp. x_3) kartézského systému [souřadnic](#) a je z intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$;
2. [nutační úhel](#) ϑ - charakterizuje otočení kolem osy y' (resp. x'_2), což je nová poloha osy x (resp. x_1) po předchozích otočeních; je z intervalu $\langle 0; \pi \rangle$;

3. rotační úhel ψ - charakterizuje otočení kolem nové polohy osy z (resp. x_3) a je z intervalu $(0; 2\pi)$.

Úhel ψ charakterizuje vlastní rotaci tuhého tělesa kolem jeho osy, která splývá s osou z. Úhel ϑ charakterizuje odchylku vlastní osy tuhého tělesa (kolem níž tuhé těleso rotuje) od svislého směru a úhel φ určuje natočení tzv. uzlové přímky. Úhly ϑ a φ tak jednoznačně určují polohu osy tuhého tělesa, kolem níž těleso rotuje.

Úhly ϑ a φ mají analogický význam jako sférické souřadnice resp. zeměpisné souřadnice: úhel ϑ odpovídá zeměpisné šířce (odklon od [severního pólu](#)) a úhel φ zeměpisné délce.

Postup, kterým ukážeme, že libovolné natočení tuhého tělesa v prostoru lze složit z natočení charakterizovaných právě zavedenými Eulerovými úhly, aplikujeme ve třech krocích na rotaci kartézského systému souřadnic $Oxyz$:

1. rotace kolem osy z (resp. x_3) o úhel φ (viz obr. 61) - tato rotace je popsána maticí **D**, která má stejný tvar jako matice daná předpisem (242)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (249)$$

jíž přísluší vektor úhlové rychlosti ve tvaru

$$\overline{\Omega^D} = (0; 0; \dot{\varphi}). \quad (250)$$

2. rotace kolem nové polohy osy y (resp. x_2) o úhel ϑ (viz obr. 62) - tato rotace je popsána maticí **C** ve tvaru

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}; \quad (251)$$

této matici odpovídá vektor úhlové rychlosti ve tvaru

$$\overline{\Omega^C} = (\dot{\vartheta}; 0; 0). \quad (252)$$

3. rotace kolem nové polohy osy z (resp. x_3) o úhel ψ (viz obr. 63) - tato rotace je popsána maticí **B** ve tvaru

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (253)$$

které odpovídá vektor úhlové rychlosti ve tvaru

$$\overline{\Omega^B} = (0; 0; \dot{\psi}). \quad (254)$$

Na základě vztahu (246) můžeme výsledné otočení, které vznikne složením právě popsáných otočení v uvedeném pořadí charakterizovaných maticemi (249), (251) a (253), popsat maticí **A** ve tvaru

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}. \quad (255)$$

V právě uvedeném vztahu závisí na pořadí násobení, protože násobení matic není obecně komutativní. A ani [skládání otočení](#), které je maticemi popsáno, není obecně komutativní.

Této matici pak odpovídá vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$, který můžeme psát s využitím vztahu (248) ve tvaru

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}^B + \mathbf{B} \cdot \vec{\Omega}^C + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{\Omega}^D, \quad (256)$$

v němž jsou vektory úhlových rychlostí $\vec{\Omega}^C$ a $\vec{\Omega}^D$ násobeny příslušnými maticemi proto, abychom tyto vektory vyjádřili ve správné bázi, v níž jsou definovány a mají smysl. Vektor $\vec{\Omega}^C$ je totiž definován v soustavě souřadnic (v bázi), která vznikne po prvním otočení. Proto jej musíme přepočítat tak, jak by vypadal po třetím otočení, aby jej bylo možné přičíst k vektoru $\vec{\Omega}^B$, který je definován v bázi, která vznikne po třetím otočení daného kartézského systému. Analogicky je nutné vektor $\vec{\Omega}^D$, který je definován v původní kartézské soustavě, transformovat do soustavy souřadnic, kterou získáme po dalších dvou otočeních. Po dosazení matic (251) a (253) a vektorů (250), (252) a (254), které je nutné kvůli operacím s maticemi dosazovat v transponované podobě, do vztahu (256)

dostaneme $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \right)$. Provedením naznačených

operací s maticemi získáme vztah $\begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\phi} \sin\vartheta \\ \dot{\phi} \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos\psi + \dot{\phi} \sin\vartheta \sin\psi \\ -\dot{\vartheta} \sin\psi + \dot{\phi} \sin\vartheta \cos\psi \\ \psi + \dot{\phi} \cos\vartheta \end{pmatrix}$. Tedy

můžeme psát

$$\begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos\psi + \dot{\phi} \sin\vartheta \sin\psi \\ -\dot{\vartheta} \sin\psi + \dot{\phi} \sin\vartheta \cos\psi \\ \psi + \dot{\phi} \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad (257)$$

což je maticové vyjádření **Eulerových kinematických rovnic** v **korotující bázi**, která rotuje spolu s tělesem. Vektor $\vec{\Omega}$ má směr okamžité **osy otáčení**, kolem níž se tuhé těleso otáčí.