Tenzor setrvačnosti

Tenzor setrvačnosti zavedeme nejdříve bez ohledu na souřadnice; ty určíme až nakonec odvozování.

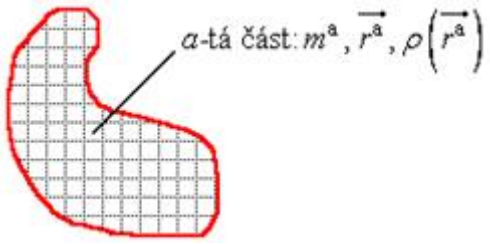
TENZOR SETRVAČNOSTI POPISUJE SETRVAČNÉ VLASTNOSTI TUHÉHO TĚLESA VŮČI ROTAČNÍMU POHYBU.

Tenzor setrvačnosti tedy udává nechuť tuhého tělesa k rotačnímu pohybu analogicky, jako udává hmotnost (setrvačná hmotnost) hmotného bodu nechuť k jeho translačnímu pohybu.

Vyjdeme z celkového momentu hybnosti $\vec{L}$ tuhého tělesa, který je definován vztahem

$$\vec{L} = \sum_{a=1}^{N} \vec{r^a} \times \vec{p^a}, \tag{258}$$

ve kterém se sčítá přes všechny body tuhého tělesa, tj. od jedné do *N*. Každý bod tuhého tělesa je charakterizován hmotností m^a, polohovým vektorem $\vec{r^a}$ a hustota objemového elementu je $\rho\left(\vec{r^a}\right)$ - viz obr. 64.



Obr. 64

Vztah (258) můžeme dále upravit s využitím definice hybnosti a s využitím vlastností vektorového součinu. Dostáváme tak $\vec{L} = \sum_{a=1}^{N} \vec{r^a} \times m^a \vec{v^a} = \sum_{a=1}^{N} m^a \vec{r^a} \times \vec{v^a} = \sum_{a=1}^{N} m^a \vec{r^a} \times \frac{d\vec{r^a}}{dt}$. S využitím vztahu (241) pak můžeme v úpravách pokračovat: $\vec{L} = \sum_{a=1}^{N} m^a \vec{r^a} \times \left(\frac{d\vec{r^a}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r^a} \right)$. Platí $\frac{d\vec{r^a}}{dt} = \vec{o}$, neboť popisujeme pohyb tuhého tělesa jako jednoho celku a jeho jednotlivé elementy se proto vzhledem k sobě nepohybují. Můžeme tedy psát

$$\vec{L} = \sum_{a=1}^{N} m^a \vec{r^a} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r^a} \right). \tag{259}$$

Pravdivost rovnosti $\frac{d\vec{r^a}}{dt} = \vec{o}$ je zřejmá v analogii s pohybujícím se dětským kolotočem: koník, autíčko, ... na dětském kolotoči jsou vzhledem ke kolotoči v klidu.

Nyní vezmeme libovolný pomocný vektor $\vec{\xi}$, který zatím nemá žádný fyzikální smysl, a do jeho směru promítneme vektor momentu hybnosti $\vec{L}$. Následující úvahy provedeme obecně a teprve až potom dáme vektoru $\vec{\xi}$ fyzikální význam. Promítnutí vektoru $\vec{\xi}$ do směru vektoru $\vec{L}$ provedeme pomocí skalárního součinu těchto dvou vektorů. S využitím vztahu (259) dostaneme

$$\vec{L}.\vec{\xi} = \sum_{a=1}^{N} m^a \vec{r^a} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r^a} \right).\vec{\xi}. \tag{260}$$

Uvědomíme-li si, že absolutní hodnota smíšeného součinu vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ ve tvaru $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ určuje objem rovnoběžnostěnu, jehož tři strany vycházející z jednoho jeho vrcholu jsou reprezentovány vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$, je zřejmé, že uvedený zápis smíšeného součinu můžeme psát v dalších tvarech. Uvedené pořadí násobení vektorů totiž není jediné - při určování objemu rovnoběžnostěnu nezávisí na tom, v jakém pořadí vynásobíme délky jeho stran vycházejících z jednoho jeho vrcholu.

Vztah (260) lze tedy přepsat ve tvaru $\vec{L}.\vec{\xi} = \sum_{a=1}^{N} m^a \left(\vec{\xi}\times\vec{r^a}\right).\left(\vec{\Omega}\times\vec{r^a}\right)$ a definovat bilineární zobrazení $I\left(\vec{\xi},\vec{\Omega}\right)$ předpisem

$$I\left(\vec{\xi},\vec{\Omega}\right) = \sum_{a=1}^{N} m^a \left(\vec{\xi}\times\vec{r^a}\right).\left(\vec{\Omega}\times\vec{r^a}\right), \tag{261}$$

na které lze nahlížet jako na funkci dvou proměnných $\vec{\xi}$ a $\vec{\Omega}$.

Hmotnosti m^a a polohové vektory $\vec{r^a}$ jsou dány vyšetřovaným tuhým tělesem, vektory $\vec{\xi}$ a $\vec{\Omega}$ vstupují do popisu tuhého tělesa „zvenčí“.

Vztah (261) definuje bilineární zobrazení proto, že vztah (261) je lineární v obou argumentech (součet i součin jsou lineární operace). Dvěma vektorům je tímto zobrazením přiřazeno reálné číslo, což je schéma této struktury. Matematicky je ovšem tímto předpisem definován tenzor.

Vztahem (261) jsme tedy definovali tenzor druhého řádu - v našem případě to je **tenzor setrvačnosti**.

Fakt, že se jedná o tenzor *druhého* řádu vyplývá z toho, že k jeho určení jsou nutné *dva* vektory.

Ve speciálním případě lze vztah (261) psát ve tvaru $I\left(\vec{\Omega},\vec{\Omega}\right) = \sum_{a=1}^{N} m^a \left(\vec{\Omega}\times\vec{r^a}\right).\left(\vec{\Omega}\times\vec{r^a}\right) = \sum_{a=1}^{N} m^a \vec{v^a}\vec{v^a} = \sum_{a=1}^{N} m^a \left(v^a\right)^2 = 2T$. Kinetickou energii T rotujícího tuhého tělesa lze tedy psát ve tvaru

$$T = \frac{1}{2} I\left(\vec{\Omega},\vec{\Omega}\right). \tag{262}$$

Dále bychom rádi vyjádřili prvky I_{ij} matice **I**. K tomu je ale nutné zavést bázi, v níž vyjádříme všechny vektory v uvažovaném vztahu (v tomto případě vztah (262)). Pro obecný tenzor $T\left(\vec{v},\vec{w}\right)$ platí: $T\left(\vec{v},\vec{w}\right) = T\left(v_i\vec{e_i}, w_j\vec{e_j}\right) = v_i w_j T\left(\vec{e_i},\vec{e_j}\right)$, odkud vyplývá, že

$$T_{ij} = T\left(\vec{e_i},\vec{e_j}\right). \tag{263}$$

S využitím vztahu (263) můžeme psát $T'_{ij} = T\left(\vec{e'_i},\vec{e'_j}\right) = T\left(A_{ik}\vec{e_k}, A_{jl}\vec{e_l}\right) = A_{ik}A_{jl}T\left(\vec{e_k},\vec{e_l}\right)$, takže dostáváme

$$T'_{ij} = A_{ik}A_{jl}T_{kl}. \tag{264}$$

Správně bychom měli rozlišovat psaní horních indexů a dolních indexů, ale zde to není nutné, neboť lokálně pracujeme v kartézských souřadnicích (v kartézské bázi).

Nyní můžeme vyjádřit tenzor $\vec{\vec{I}}$ definovaný vztahem (261) ve složkách báze $\left\{\vec{e_i}\right\}$. Můžeme proto

psát $I\left(\vec{\xi},\vec{\Omega}\right)=I\left(\xi_i\vec{e_i},\Omega_j\vec{e_j}\right)=\xi_i\Omega_j I\left(\vec{e_i},\vec{e_j}\right)$ a tedy

$$I\left(\vec{\xi},\vec{\Omega}\right)=I_{ij}\xi_i\Omega_j. \tag{265}$$

Matice $I\left(\vec{\xi},\vec{\Omega}\right)$ je symetrická matice typu $(3,3)$, jejíž symetričnost vyplývá přímo z její definice (261): skalární součin (pomocí kterého je definována) je totiž komutativní. To znamená, že matice má šest nezávislých prvků.

Dříve než budeme pokračovat v dalších úpravách vztahu (261), si uvědomíme, že každý vektor $\vec{r^a}$ (tj. pro všechny přípustné hodnoty *a*) lze rozepsat pomocí vektorů báze, v níž popisujeme celý pohyb, ve tvaru

$$\vec{r^a}=x_k^a\vec{e_k}, \tag{266}$$

kde x_k^a je *k*-tá souřadnice *a*-tého vektoru.

S využitím vztahů (263) a (266) můžeme nyní vztah (261) psát ve tvaru: $I_{ij}=I\left(\vec{e_i},\vec{e_j}\right)=\sum_{a=1}^{N}m^a\left(\vec{e_i}\times\vec{r^a}\right).\left(\vec{e_j}\times\vec{r^a}\right)=\sum_{a=1}^{N}m^a\left(\vec{e_i}\times x_k^a\vec{e_k}\right).\left(\vec{e_j}\times x_l^a\vec{e_l}\right)=\sum_{a=1}^{N}m^a x_k^a x_l^a\left(\vec{e_i}\times\vec{e_k}\right)_r.\left(\vec{e_j}\times\vec{e_l}\right)_r$. Uvědomíme-li si, že výraz $\left(\vec{e_i}\times\vec{e_k}\right)_r$ představuje *r*-tou složku naznačeného vektorového součinu, můžeme pokračovat v úpravách: $I_{ij}=\sum_{a=1}^{N}m^a x_k^a x_l^a\varepsilon_{ikr}\varepsilon_{jlr}=\sum_{a=1}^{N}m^a x_k^a x_l^a\varepsilon_{rik}\varepsilon_{rjl}=\sum_{a=1}^{N}m^a x_k^a x_l^a\left(\delta_{ij}\delta_{kl}-\delta_{il}\delta_{kj}\right)=\sum_{a=1}^{N}m^a\left(\delta_{ij}\delta_{kl}x_k^a x_l^a-\delta_{il}\delta_{kj}x_k^a x_l^a\right)$. Dostáváme tedy

$$I_{ij}=\sum_{a=1}^{N}m^a\left(\delta_{ij}x_l^a x_l^a-x_i^a x_j^a\right). \tag{267}$$

Pokud si nyní představíme, že tuhé těleso, které popisujeme, je složeno z krychliček (resp. hranolků) s různou hustotou $\rho\left(\vec{r}\right)$, můžeme provést spojitou limitu vztahu (267) a získáme

$$I_{ij}=\int_V\left(\delta_{ij}x_l x_l-x_i x_j\right)\rho\left(\vec{r}\right)\mathrm{d}V, \tag{268}$$

což jsou složky tenzoru setrvačnosti popisující spojité prostředí. x_l, x_i a x_j jsou souřadnice polohového vektoru vyjádřené v bázi, v níž počítáme.

Platí několik základních vztahů pro počítání ve složkách tenzoru setrvačnosti $\overleftrightarrow{I}$. První z nich je triviální a vyplývá přímo ze vztahu (267) resp. (268):

$$I_{ij}=I_{ji}. \tag{269}$$

Záměnou indexů se v sumě resp. v integrandu nic nezmění.

S využitím vztahů (260) a (261) můžeme psát $\vec{L}.\vec{\xi}=I\left(\vec{\xi},\vec{\Omega}\right)$. S využitím vztahu (265) můžeme ve složkách psát $L_i\xi_i=I_{ij}\xi_i\Omega_j$ a tedy

$$L_i=I_{ij}\Omega_j. \tag{270}$$

Dále můžeme vztah (262) s využitím vztahu (265) rozepsat ve složkách báze a získáme

$$T=\frac{1}{2}I_{ij}\Omega_i\Omega_j. \tag{271}$$

Kinetickou energii T lze vyjádřit v zobecněných souřadnicích, kterými jsou v případě popisu rotace tuhého tělesa Eulerovy úhly. Za Ω_1, Ω_2 a Ω_3 tedy můžeme dosadit z Eulerových kinematických rovnic (257). Získáme tak vyjádření kinetické energie v zobecněných souřadnicích, můžeme vypočítat Lagrangeovu funkci definovanou vztahem (48) a řešit Lagrangeovy rovnice druhého druhu (47).

Matice **I** je symetrická matice, což znamená, že je možné jí pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů diagonalizovat. Vlastní vektory lze v případě matice tenzoru setrvačnosti volit na osách kartézského systému souřadnic. Volbou ortogonální báze pak získáme hlavní čísla matice **I** přímo na její hlavní diagonále. Proto platí

$$I_{ij}v_j = \lambda v_j, \tag{272}$$

kde $\vec{v}$ je vlastní vektor matice **I** a λ vlastní číslo matice **I**.

Ve vztahu (272) je na levé straně vektor, který má obecně jiný směr a jinou velikost než vektor na pravé straně tohoto vztahu. A právě vztah (272) určuje podmínku pro nalezení takového vektoru $\vec{v}$, jehož směr se nezmění po aplikaci matice **I**. Velikost může být jiná - to se případně „dorovná“ koeficientem λ.

Ortogonální báze tvořená vektory $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ a $\vec{e_3}$, které jsou zároveň i vlastními vektory matice **I**, určují hlavní osy tuhého tělesa resp. hlavní osy tenzoru setrvačnosti, který lze psát ve tvaru

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \tag{273}$$

kde I_1, I_2 a I_3 jsou vlastní čísla matice **I**.

Vlastní čísla matice **I** byla ve vztahu (272) označena symbolem λ, ve vztahu (273) byla označena jako I_1, I_2 a I_3. Vztah (272) je „matematická definice“ vlastních čísel a vlastních vektorů matice, zatímco vztah (273) definuje fyzikální veličinu: tenzor setrvačnosti.

Každé těleso má tedy tři takové osy, pro které má tenzor setrvačnosti tvar daný výrazem (273), tj. má jen tři nezávislé složky na hlavní diagonále. Tyto tři uvažované osy tuhého tělesa procházejí jeho těžištěm a nazývají se **hlavní osy tuhého tělesa**. Proto se zkonkretizuje zápis vztahů (270) a (271), které přejdou na vztahy:

$$L_1 = I_1\Omega_1, \; L_2 = I_2\Omega_2 \text{ a } L_3 = I_3\Omega_3 \tag{274}$$

a

$$T = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right). \tag{275}$$

© Encyklopedie Fyziky (http://fyzika.jreichl.com); Jaroslav Reichl, Martin Všetička
Licence http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/ zakazuje úpravy a komerční distribuci.