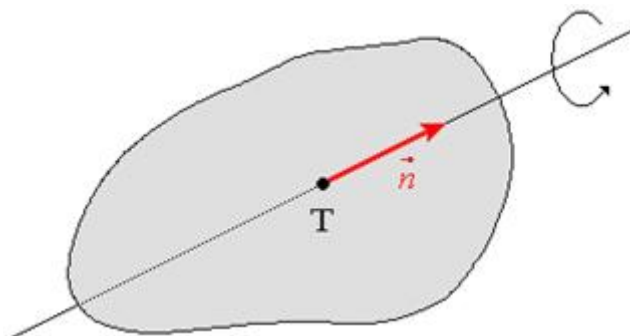


## Moment setrvačnosti

Už z úvodní motivace ke studiu [dynamiky tuhého tělesa](#) je zřejmé, že [tenzor setrvačnosti](#)  $I_{ij}$  souvisí s momentem setrvačnosti. Budeme se tedy snažit nalézt vztah mezi složkami tenzoru setrvačnosti  $I_{ij}$  a momentem setrvačnosti  $I_{\vec{n}}$ .

**MOMENT SETRVAČNOSTI  $I_{\vec{n}}$  TUHÉHO TĚLESA BUDEME UVAŽOVAT VŮČI DANÉ OSE, KOLEM NÍŽ SE TUHÉ TĚLESO OTÁČÍ A KTERÁ JE URČENÁ JEDNOTKOVÝM VEKTOREM  $\vec{n}$ .**



Obr. 65

Situace je zobrazená na obr. 65. Na obr. 66 je pak zobrazen detailnější rozbor situace, který budeme potřebovat pro další odvození. Symbolem  $r_{\perp}$  je označena kolmá vzdálenost elementu tuhého tělesa o objemu  $dV$  (resp. o hmotnosti  $dm = \rho dV$ ) od [osy otáčení](#).

[Kinetickou energii](#)  $T$  tuhého tělesa chceme vyjádřit ve tvaru

$$T = \frac{1}{2} I_{\vec{n}} \Omega^2 \quad (276)$$

a přitom víme, že platí vztah (271). Na základě vztahu (243), který byl odvozen při vyšetřování [rotace](#) tuhého tělesa kolem pevné osy ([rotace s pevnou osou](#)), víme, že vektor [úhlové rychlosti](#)  $\vec{\Omega}$  má směr osy otáčení tuhého tělesa. V našem případě tedy platí

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{n}. \quad (277)$$

S využitím vztahu (277) lze vztah (271) psát ve tvaru  $T = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j$  a tedy

$$T = \frac{1}{2} I_{ij} m_i m_j \Omega^2. \quad (278)$$

Porovnáním vztahů (276) a (278) dostáváme vyjádření pro moment setrvačnosti  $I_{\vec{n}}$  ve tvaru

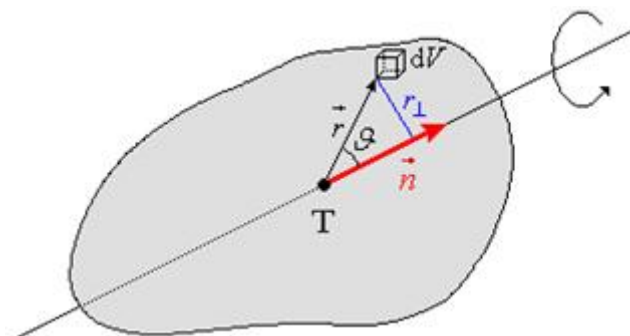
$$I_{\vec{n}} = I_{ij} m_i m_j. \quad (279)$$

Složky tenzoru setrvačnosti jsou definovány integrálem (268), který je vypočítán na základě charakteristik tuhého tělesa (hmotnost, rozložení látky v tuhém tělese, hustota tuhého tělesa, ...). Tenzor setrvačnosti je tedy určen pouze na základě charakteristik tuhého tělesa a nezávisí na volbě osy, kolem které se tuhé těleso otáčí. Na volbě této osy závisí až moment setrvačnosti  $I_{\vec{n}}$  definovaný vztahem (279). To je ovšem velmi příjemné pro praktické počítání.

Spočítáme totiž jeden integrál a momenty setrvačnosti daného tělesa vzhledem k libovolné ose, kolem které se toto tuhé těleso otáčí, dopočítáme již sčítáním podle vztahu (279).

A nebo lze v případě tuhých těles velmi nepravidelných tvarů, u kterých by byl výpočet tenzoru setrvačnosti podle vztahu (268) komplikovaný, postupovat obráceně. Experimentálně určit

momenty setrvačnosti tělesa rotujícího podle hlavních os a na základě toho určit tenzor setrvačnosti. Ten pak můžeme použít k výpočtu momentu setrvačnosti v případě, že tuhé těleso rotuje kolem libovolné osy.



Obr. 66

Dosažením definičního vztahu tenzoru setrvačnosti (268) do definičního vztahu momentu setrvačnosti (279) dostaneme  $I_{\vec{n}} = \int_V \left( \delta_{ij} m_i m_j x_i x_j - x_i x_j m_i m_j \right) \rho dV = \int_V \left( m_i m_j x_i x_j - x_i m_i x_j m_j \right) \rho dV = \int_V \left( m^2 r^2 - (\vec{r} \cdot \vec{n})^2 \right) \rho dV$ . Uvědomíme-li si, že osa rotace je charakterizovaná jednotkovým vektorem  $\vec{n}$ , můžeme pokračovat v rozpisu vztahu dále (i s využitím obr. 66)  $I_{\vec{n}} = \int_V \left( r^2 - r^2 \cdot 1 \cdot \cos^2 \varphi \right) \rho dV = \int_V (r \sin \varphi)^2 \rho dV = \int_V r_{\perp}^2 \rho dV$ . Pro moment setrvačnosti tedy dostáváme

$$I_{\vec{n}} = \int_V r_{\perp}^2 dm, \quad (280)$$

což je běžný vztah definující **moment setrvačnosti tuhého tělesa**.

Abychom získali další souvislosti pro praktické výpočty a praktické použití momentu setrvačnosti, upravíme definiční vztah (279) momentu setrvačnosti tak, že jej vydělíme momentem setrvačnosti  $I_{\vec{n}}$ . Získáme tak výraz  $1 = I_{ij} \frac{m_i}{\sqrt{I_{\vec{n}}}} \frac{m_j}{\sqrt{I_{\vec{n}}}}$ . Pokud nadefinujeme pomocný vektor  $\vec{\xi} = (\xi_1; \xi_2; \xi_3)$  vztahem

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{I_{\vec{n}}}} \quad (281)$$

můžeme psát

$$I_{ij} \xi_i \xi_j = 1. \quad (282)$$

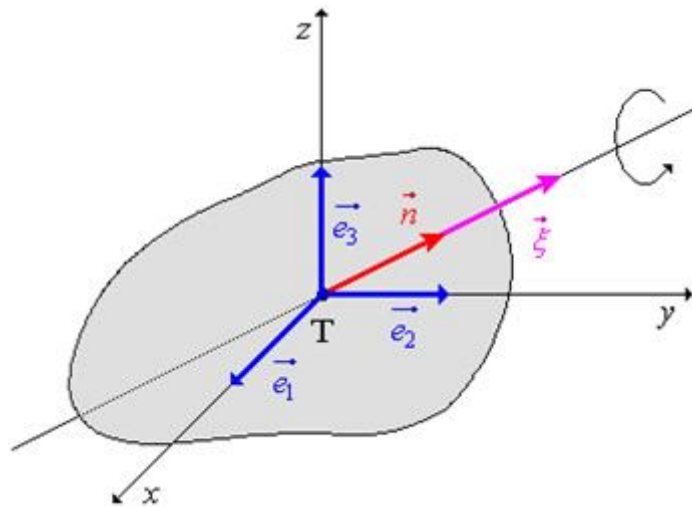
Vektor  $\vec{\xi}$  definovaný vztahem (281) má směr osy rotace tuhého tělesa (ta je daná směrem vektoru  $\vec{n}$ ), ale jeho velikost je obecně od vektoru  $\vec{n}$  různá (viz obr. 67). V bázi hlavních os tedy můžeme vztah (282) upravit na tvar  $I_1 \xi_1^2 + I_2 \xi_2^2 + I_3 \xi_3^2 = 1$ . Další matematickou úpravou získáme tvar

$$\left( \frac{\xi_1}{\sqrt{I_1}} \right)^2 + \left( \frac{\xi_2}{\sqrt{I_2}} \right)^2 + \left( \frac{\xi_3}{\sqrt{I_3}} \right)^2 = 1, \quad (283)$$

což je rovnice elipsoidu zapsaná v prostoru  $(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ . Tento elipsoid se nazývá **elipsoid**

**setrvačnosti** a jeho hlavní **poloosy** mají délky  $\frac{1}{\sqrt{I_1}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{I_2}}$  a  $\frac{1}{\sqrt{I_3}}$ .

Hlavní osy jsou většinou kolmé na roviny symetrie uvažovaného tuhého tělesa.



Obr. 67

V každém tuhém tělese tedy existují hlavní osy. To znamená, že každému tuhému tělesu lze abstraktně opsat elipsoid setrvačnosti, který v nějakém bodě protíná osu, kolem které tuhé těleso rotuje a která je určena vektorem  $\vec{n}$ . Průsečík elipsoidu setrvačnosti a osy rotace tuhého tělesa má **souřadnice**  $[\xi_1; \xi_2; \xi_3]$ , tj. polohový vektor tohoto průsečíku je vektor  $\vec{\xi} = (\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ . Velikost tohoto vektoru je  $|\vec{\xi}| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ . S využitím definice vektoru  $\vec{\xi}$  ve tvaru (281) můžeme psát  $|\vec{\xi}| = \frac{|\vec{n}|}{\sqrt{I_{\vec{n}}}}$ .

Vektor  $\vec{n}$  byl ovšem zvolen jako jednotkový, takže můžeme psát  $|\vec{\xi}| = \frac{1}{\sqrt{I_{\vec{n}}}}$  a po úpravě dostáváme

$$I_{\vec{n}} = \frac{1}{|\vec{\xi}|^2}. \quad (284)$$

Moment setrvačnosti  $I_{\vec{n}}$  tuhého tělesa, který charakterizuje otáčení tohoto tělesa kolem osy dané vektorem  $\vec{n}$ , tedy určujeme pomocí průsečíku této osy s abstraktním elipsoidem setrvačnosti. To znamená, že moment setrvačnosti  $I_{\vec{n}}$  se spojitě mění v závislosti na spojitě změně polohy osy rotace tuhého tělesa.

Při změně polohy osy rotace se změní směr vektoru  $\vec{n}$  a tedy se změní průsečík této osy s elipsoidem setrvačnosti. Změna souřadnic  $[\xi_1; \xi_2; \xi_3]$  tohoto průsečíku vede (podle vztahu (284)) ke změně momentu setrvačnosti tělesa.

Je-li osou rotace tuhého tělesa např. první hlavní osa (tj. je-li  $\vec{n} = \vec{e}_1$ ), lze vztah (284) s využitím

předchozích informací psát ve tvaru  $I_{\vec{n}} = \frac{1}{\xi_1^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{I_1}}\right)^2} = I_1$ . Tedy relativně obtížně definovaný tenzor

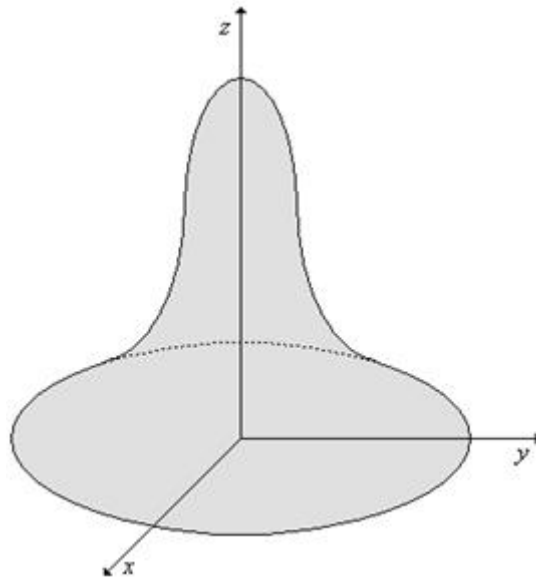
setrvačnosti nyní přináší velké výhody při jednoduchém a rychlém určování momentu setrvačnosti  $I_{\vec{n}}$ .

Další zjednodušení tenzoru setrvačnosti  $I$  (a tedy i následný výpočet momentu setrvačnosti) přinášejí symetrie tuhého tělesa:

1. tuhé těleso je rotační těleso - pak platí  $I_1 = I_2 \neq I_3$  a elipsoid setrvačnosti má tvar

podobný tvaru na obr. 68;

2. tuhé těleso je koule -  $I_1 = I_2 = I_3$  a elipsoidem setrvačnosti je sféra; navíc v tomto případě je moment setrvačnosti  $I_{\mathbf{n}}$  konstantní pro všechny osy, které procházejí [těžištěm](#) tuhého tělesa (tj. uvažované koule);
3. tuhé těleso je krychle - ta je symetrická a její hlavní osy jsou kolmé na její stěny. Proto je moment setrvačnosti  $I_{\mathbf{n}}$  stejný pro všechny osy krychle procházející jejím těžištěm. Elipsoidem setrvačnosti krychle je sféra.



Obr. 68