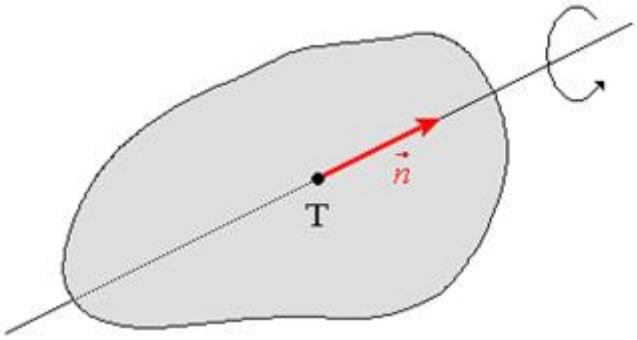
Moment setrvačnosti

Už z úvodní motivace ke studiu dynamiky tuhého tělesa je zřejmé, že tenzor setrvačnosti $\mathbf{I}$ souvisí s momentem setrvačnosti. Budeme se tedy snažit nalézt vztah mezi složkami tenzoru setrvačnosti I_{ij} a momentem setrvačnosti $I_{\vec{n}}$.

MOMENT SETRVAČNOSTI $I_{\vec{n}}$ TUHÉHO TĚLESA BUDEME UVAŽOVAT VŮČI DANÉ OSE, KOLEM NÍŽ SE TUHÉ TĚLESO OTÁČÍ A KTERÁ JE URČENÁ JEDNOTKOVÝM VEKTOREM $\vec{n}$.



Obr. 65

Situace je zobrazená na obr. 65. Na obr. 66 je pak zobrazen detailnější rozbor situace, který budeme potřebovat pro další odvození. Symbolem $r_\perp$ je označena kolmá vzdálenost elementu tuhého tělesa o objemu dV (resp. o hmotnosti $dm = \rho dV$) od osy otáčení.

Kinetickou energii T tuhého tělesa chceme vyjádřit ve tvaru

$$T = \frac{1}{2} I_{\vec{n}} \Omega^2 \tag{276}$$

a přitom víme, že platí vztah (271). Na základě vztahu (243), který byl odvozen při vyšetřování rotace tuhého tělesa kolem pevné osy (rotace s pevnou osou), víme, že vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega}$ má směr osy otáčení tuhého tělesa. V našem případě tedy platí

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{n}. \tag{277}$$

S využitím vztahu (277) lze vztah (271) psát ve tvaru $T = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega n_i \Omega n_j$ a tedy

$$T = \frac{1}{2} I_{ij} n_i n_j \Omega^2. \tag{278}$$

Porovnáním vztahů (276) a (278) dostáváme vyjádření pro moment setrvačnosti $I_{\vec{n}}$ ve tvaru

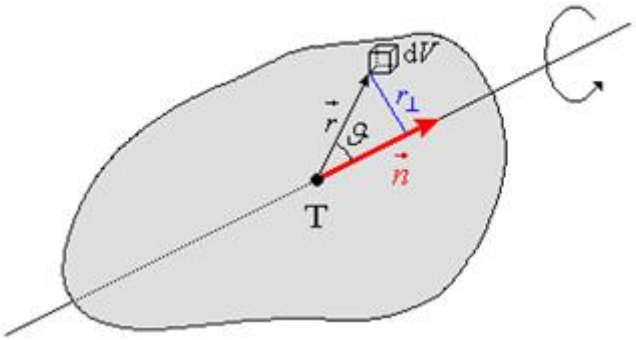
$$I_{\vec{n}} = I_{ij} n_i n_j. \tag{279}$$

Složky tenzoru setrvačnosti jsou definovány integrálem (268), který je vypočítán na základě charakteristik tuhého tělesa (hmotnost, rozložení látky v tuhém tělese, hustota tuhého tělesa, ...). Tenzor setrvačnosti je tedy určen pouze na základě charakteristik tuhého tělesa a nezávisí na volbě osy, kolem které se tuhé těleso otáčí. Na volbě této osy závisí až moment setrvačnosti $I_{\vec{n}}$ definovaný vztahem (279). To je ovšem velmi příjemné pro praktické počítání.

Spočítáme totiž jeden integrál a momenty setrvačnosti daného tělesa vzhledem k libovolné ose, kolem které se toto tuhé těleso otáčí, dopočítáme již sčítáním podle vztahu (279).

A nebo lze v případě tuhých těles velmi nepravidelných tvarů, u kterých by byl výpočet tenzoru setrvačnosti podle vztahu (268) komplikovaný, postupovat obráceně. Experimentálně určit

momenty setrvačnosti tělesa rotujícího podle hlavních os a na základě toho určit tenzor setrvačnosti. Ten pak můžeme použít k výpočtu momentu setrvačnosti v případě, že tuhé těleso rotuje kolem libovolné osy.



Obr. 66

Dosazením definičního vztahu tenzoru setrvačnosti (268) do definičního vztahu momentu setrvačnosti (279) dostaneme $I_{\vec{n}} = \int_V \left(\delta_{ij} n_i n_j x_1 x_1 - x_i x_j n_i n_j\right) \rho \mathrm{d}V = \int_V \left(n_i n_i x_1 x_1 - x_i n_i x_j n_j\right) \rho \mathrm{d}V = \int_V \left(n^2 r^2 - \left(\vec{r}.\vec{n}\right)^2\right) \rho \mathrm{d}V$. Uvědomíme-li si, že osa rotace je charakterizovaná jednotkovým vektorem $\vec{n}$, můžeme pokračovat v rozpisu vztahu dále (i s využitím obr. 66) $I_{\vec{n}} = \int_V \left(r^2 - r^2.1.\cos^2\vartheta\right) \rho \mathrm{d}V = \int_V \left(r \sin\vartheta\right)^2 \rho \mathrm{d}V = \int_V r_\perp^2 \rho \mathrm{d}V$. Pro moment setrvačnosti tedy dostáváme

$$I_{\vec{n}} = \int_V r_\perp^2 \mathrm{d}m, \tag{280}$$

což je běžný vztah definující **moment setrvačnosti tuhého tělesa**.

Abychom získali další souvislosti pro praktické výpočty a praktické použití momentu setrvačnosti, upravíme definiční vztah (279) momentu setrvačnosti tak, že jej vydělíme momentem setrvačnosti $I_{\vec{n}}$. Získáme tak výraz $1 = I_{ij} \frac{n_i}{\sqrt{I_{\vec{n}}}} \frac{n_j}{\sqrt{I_{\vec{n}}}}$. Pokud nadefinujeme pomocný vektor $\vec{\xi} = (\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ vztahem

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{I_{\vec{n}}}} \tag{281}$$

můžeme psát

$$I_{ij} \xi_i \xi_j = 1. \tag{282}$$

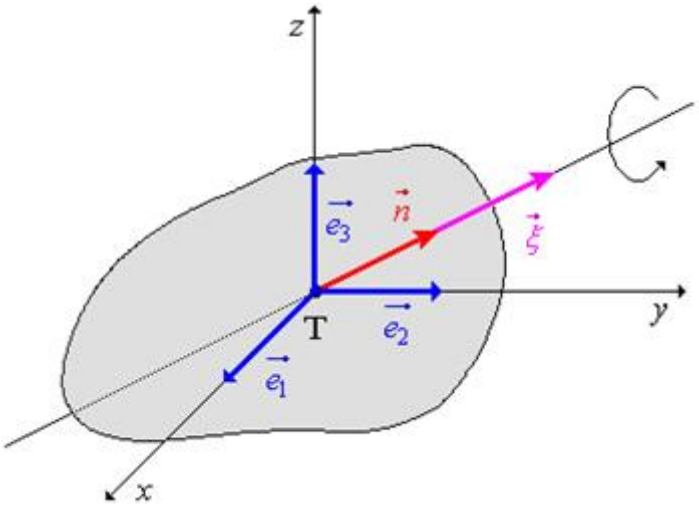
Vektor $\vec{\xi}$ definovaný vztahem (281) má směr osy rotace tuhého tělesa (ta je daná směrem vektoru $\vec{n}$), ale jeho velikost je obecně od vektoru $\vec{n}$ různá (viz obr. 67). V bázi hlavních os tedy můžeme vztah (282) upravit na tvar $I_1 \xi_1^2 + I_2 \xi_2^2 + I_3 \xi_3^2 = 1$. Další matematickou úpravou získáme tvar

$$\left(\frac{\xi_1}{\frac{1}{\sqrt{I_1}}}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{\frac{1}{\sqrt{I_2}}}\right)^2 + \left(\frac{\xi_3}{\frac{1}{\sqrt{I_3}}}\right)^2 = 1, \tag{283}$$

což je rovnice elipsoidu zapsaná v prostoru $(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$. Tento elipsoid se nazývá **elipsoid**

setrvačnosti a jeho hlavní poloosy mají délky $\frac{1}{\sqrt{I_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{I_2}}$ a $\frac{1}{\sqrt{I_3}}$.

Hlavní osy jsou většinou kolmé na roviny symetrie uvažovaného tuhého tělesa.



Obr. 67

V každém tuhém tělese tedy existují hlavní osy. To znamená, že každému tuhému tělesu lze abstraktně opsat elipsoid setrvačnosti, který v nějakém bodě protíná osu, kolem které tuhé těleso rotuje a která je určená vektorem $\vec{n}$. Průsečík elipsoidu setrvačnosti a osy rotace tuhého tělesa má souřadnice $[\xi_1; \xi_2; \xi_3]$, tj. polohový vektor tohoto průsečíku je vektor $\vec{\xi} = (\xi_1; \xi_2; \xi_3)$. Velikost tohoto vektoru je $|\vec{\xi}| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$. S využitím definice vektoru $\vec{\xi}$ ve tvaru (281) můžeme psát $|\vec{\xi}| = \frac{|\vec{n}|}{\sqrt{I_{\vec{n}}}}$. Vektor $\vec{n}$ byl ovšem zvolen jako jednotkový, takže můžeme psát $|\vec{\xi}| = \frac{1}{\sqrt{I_{\vec{n}}}}$ a po úpravě dostáváme

$$I_{\vec{n}} = \frac{1}{|\vec{\xi}|^2}. \tag{284}$$

Moment setrvačnosti $I_{\vec{n}}$ tuhého tělesa, který charakterizuje otáčení tohoto tělesa kolem osy dané vektorem $\vec{n}$, tedy určujeme pomocí průsečíku této osy s abstraktním elipsoidem setrvačnosti. To znamená, že moment setrvačnosti $I_{\vec{n}}$ se spojitě mění v závislosti na spojité změně polohy osy rotace tuhého tělesa.

Při změně polohy osy rotace se změní směr vektoru $\vec{n}$ a tedy se změní průsečík této osy s elipsoidem setrvačnosti. Změna souřadnic $[\xi_1; \xi_2; \xi_3]$ tohoto průsečíku vede (podle vztahu (284)) ke změně momentu setrvačnosti tělesa.

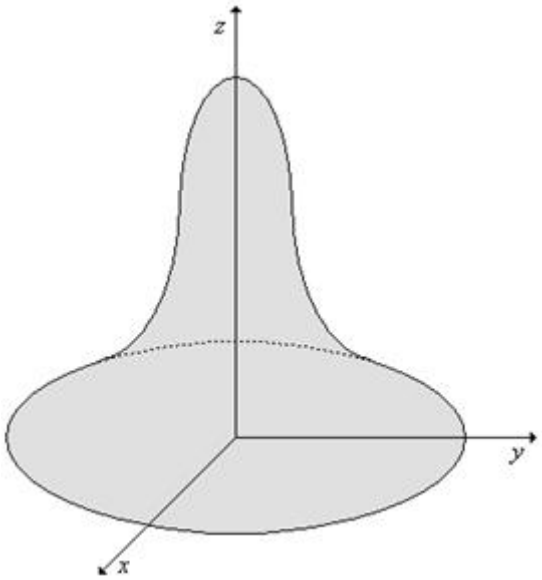
Je-li osou rotace tuhého tělesa např. první hlavní osa (tj. je-li $\vec{n} = \vec{e}_1$), lze vztah (284) s využitím předchozích informací psát ve tvaru $I_{\vec{n}} = \frac{1}{\xi_1^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{I_1}}\right)^2} = I_1$. Tedy relativně obtížně definovaný tenzor setrvačnosti nyní přináší velké výhody při jednoduchém a rychlém určování momentu setrvačnosti $I_{\vec{n}}$.

Další zjednodušení tenzoru setrvačnosti I (a tedy i následný výpočet momentu setrvačnosti) přinášejí symetrie tuhého tělesa:

1. tuhé těleso je rotační těleso - pak platí $I_1 = I_2 \neq I_3$ a elipsoid setrvačnosti má tvar

podobný tvaru na obr. 68;

2. tuhé těleso je koule - $I_1 = I_2 = I_3$ a elipsoidem setrvačnosti je sféra; navíc v tomto případě je moment setrvačnosti $I_{\vec{n}}$ konstantní pro všechny osy, které procházejí těžištěm tuhého tělesa (tj. uvažované koule);
3. tuhé těleso je krychle - ta je symetrická a její hlavní osy jsou kolmé na její stěny. Proto je moment setrvačnosti $I_{\vec{n}}$ stejný pro všechny osy krychle procházející jejím těžištěm. Elipsoidem setrvačnosti krychle je sféra.



Obr. 68

© Encyklopedie Fyziky (http://fyzika.jreichl.com); Jaroslav Reichl, Martin Všetička
Licence http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/ zakazuje úpravy a komerční distribuci.