Booleova algebra

Tento druh algebry zavedl v 19. století anglický matematik George Boole (1815 - 1864). Zpočátku se jednalo pouze o zjednodušení zápisu matematických vět a jejich důkazů a o metodu, jak zpřehlednit práci s logickými výroky. V roce 1937 obhájil diplomovou práci mladý americký budoucí inženýr Claude Elwood Shannon (1916 - 2001) a v ní ukázal, jak Booleovu algebru použít k popisu a konstrukci složitých sítí přepínačů (elektromagnetických relé).

Booleovu algebru lze chápat jako nauku o operacích na množině obsahující dvě logické konstanty 0 a 1 a dále logické proměnné, které se označují malými písmeny (např. *a*, *b*, *c*, *x*, *y*, *z*, x_0, x_1, x_2, ...). Booleova algebra používá tento základní soubor operací:

1. logický součin - běžně se označuje operátorem $\wedge$ (*a*, *a zároveň*, AND), v technické praxi se označuje tečkou resp. vynecháním tečky;
2. logický součet - běžně se označuje operátorem $\vee$ (*nebo*, OR), v praxi se běžně používá symbol +;
3. negace - značí se buď symbolem ¬ před operandem a nebo vodorovnou čárkou nad operandem.

Vzhledem k tomu, že logická proměnná může nabývat pouze dvou hodnot 0 a 1, není Booleova algebra algebrou čísel, ale **algebrou stavů**. Logické funkce se velmi často pro přehlednost zapisují pomocí pravdivostní tabulky. Pro *n* proměnných, z nichž každá může nabývat dvou stavů, dostáváme celkem $k = 2^n$ kombinací. Pro *n* proměnných tedy existuje celkem 2^k funkcí.

Pro dvě proměnné tedy dostáváme celkem $2^4 = 16$ funkcí (viz tab. 4).

a	b	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

tab. 4

Řada funkcí, které jsou definovány v tab. 4, se běžně nepoužívá. Některé z nich ale mají natolik zajímavé vlastnosti, že se označují speciálními symboly:

1. f_0, f_{15} - identické funkce (tzv. triviální identity): f_0 identicky rovna 0, f_{15} identicky rovna 1 pro všechny hodnoty vstupních proměnných;
2. f_1 - funkce AND;
3. f_7 - funkce OR (slučovací *nebo*);
4. $f_{14} = \overline{f_1}$ - funkce NAND (negace AND);
5. $f_8 = \overline{f_7}$ - funkce NOR (negace OR);
6. f_6 - funkce XOR (vylučovací *nebo*);

Rozdíl mezi významem OR a XOR pochopíme asi nejlépe na příkladu z praxe. Ve větě „Mléko se prodává v papírových krabicích nebo v plastových láhvích.“ je *nebo* použito ve významu OR - slučovací *nebo*. Mléko se totiž může prodávat „v krabicích *a taky* v láhvích“.

Ve větě „Dneska večer půjdu do kina nebo do divadla.“ je *nebo* použito ve smyslu XOR - vylučovací *nebo*. Navštívím jen jedno představení - „*buď* kino *a nebo* divadlo“ (ale ne obě najednou).

7. $f_9 = \overline{f_6}$ - funkce ekvivalence;
8. f_{13} - funkce implikace $a \Rightarrow b$ (ta se ovšem v digitální technice nepoužívá).

Pro tři proměnné *a*, *b* a *c* platí v Booleově algebře zákony, které jsou vypsány v tab. 5.

	Logický součin	**Logický součet**
Komutativní zákony	$a.b = b.a$	$a+b = b+a$
Asociativní zákony	$a.(b.c) = (a.b).c$	$a+(b+c) = (a+b)+c$
Distributivní zákony	$a+(b.c) = (a+b).(a+c)$	$a.(b+c) = a.b+a.c$
Zákony vyloučeného třetího	$a.\bar{a} = 0$	$a+\bar{a} = 1$
Zákony neutrality	$a.1 = a$	$a+0 = a$
Zákony agresivity	$a.0 = 0$	$a+1 = 1$
Zákony o idempotenci prvků	$a.a = a$	$a+a = a$
De Morganovy zákony	$\overline{x.y} = \bar{x}+\bar{y}$	$\overline{x+y} = \bar{x}.\bar{y}$
Zákon dvojité negace	$\bar{\bar{a}} = a$	
Princip duality	$ab = c \Leftrightarrow \bar{a}+\bar{b} = \bar{c}$	$a+b = c \Leftrightarrow \bar{a}\bar{b} = \bar{c}$

tab. 5

Pozor na distributivní zákon pro logický součin (tj. na výraz $a+(b.c) = (a+b).(a+c)$) - ten v algebře reálných čísel neexistuje!

Jak logické funkce (např. z funkce z tab. 4), tak i platnost zákonů Booleovy algebry (sepsaných v tab. 5) lze rozšířit na více proměnných.

Např. $a \wedge b \wedge c$ lze na základě asociativního zákona psát ve tvaru $(a \wedge b) \wedge c$, ve kterém jsou oba logické součty ($\wedge$) aplikovány vždy na dvě proměnné. Po aplikaci prvního logického součtu máme $d = a \wedge b$ a následně provedeme logický součet $d \wedge c$.