Vytvoření Karnaughovy mapy

Předpokládejme, že máme *n* logických vstupních proměnných $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, které jsou argumenty logické funkce *f*. Logické proměnné i hodnoty funkce *f* jsou sepsány v pravdivostní tabulce s 2^n řádky. Pro praktické účely (konstrukce digitálních obvodů) je rozumné předpokládat, že *n* > 1. Karnaughovu mapu ekvivalentní pravdivostní tabulce daných logických proměnných vytvoříme v závislosti na tom, zda číslo *n* je sudé či liché:

1. *n* je sudé - seznam logických proměnných $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ rozdělíme na dva seznamy stejné délky $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ a $x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{n-1}$, kde *p* = 0,5*n*. Sestavíme dvourozměrnou tabulku, která má 2^p řádků a 2^p sloupců. Na vodorovnou i svislou osu této tabulky vyneseme jako souřadnice *p*-tice jedniček a nul, přičemž je nutné dodržet pravidlo: sousedí právě ty souřadnice, které se jako *p*-tice nul a jedniček liší právě v jedné položce. Do místa tabulky, jehož vodorovná souřadnice je $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ a svislá souřadnice je $(x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{n-1})$, napíšeme funkční hodnotu $f(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p, \ldots, x_{n-1})$ z pravdivostní tabulky.
2. *n* je liché - seznam logických proměnných $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ rozdělíme na dva seznamy délky $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_p$ a $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{n-1}$, kde *p* = 0,5(*n* - 1) (vzhledem k tomu, že jsme předpokládali, že *n* > 1, je v tomto případě $n \geq 3$). Sestavíme dvourozměrnou tabulku, která má 2^p řádků a 2^{p+1} sloupců. Na vodorovnou osu (resp. na svislou osu) této tabulky vyneseme jako souřadnice (*p* + 1)-tice (resp. *p*-tice) jedniček a nul, přičemž je nutné dodržet pravidlo: sousedí právě ty souřadnice, které se jako (*p* + 1)-tice (resp. *p* -tice) nul a jedniček liší právě v jedné položce. Do místa tabulky, jehož vodorovná souřadnice je $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_p)$ a svislá souřadnice je $(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{n-1})$, napíšeme funkční hodnotu $f(x_0, x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{n-1})$ z pravdivostní tabulky.

Karhaughova mapa pro dvě proměnné je zobrazena na obr. 28, pro tři proměnné na obr. 29 a pro čtyři proměnné na obr. 30. Ve všech případech mapa vychází z právě popsaného způsobu vytváření. Ve všech případech je zobrazena metoda, jak vyplňovat Karnaughovu mapu. Pro ujasnění, jsou u funkčních hodnot připsána i čísla řádků, které korespondují s logickými proměnnými na daném řádku (vstupní proměnné vyjadřují číslo řádku ve dvojkové soustavě).

Požadavek na to, aby se sousední souřadnice jak ve vodorovném směru, tak ve svislém směru lišily jen v jedné položce, je důležitý pro následné zjednodušování logických funkcí. Karnaughovu mapu pro tři logické proměnné (obr. 29) je nutné chápat jako mapu, která je nakreslená na válci.

> Vytištěnou mapu bychom vystřihli a papír ohnuli k sobě tak, aby se sloupeček 10 dotýkal sloupečku 00.

pravdivostní tabulka

Číslo řádku	x_1	x_0	$f(x_1, x_0)$
0	0	0	α
1	0	1	β
2	1	0	γ
3	1	1	δ

$\Leftrightarrow$

Karnaughova mapa

$x_1 \backslash x_0$	0	1
0	0 α_{00}	1 β_{01}
1	2 γ_{10}	3 δ_{11}

Obr. 28

pravdivostní tabulka

Číslo řádku	x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0	α
1	0	0	1	β
2	0	1	0	γ
3	0	1	1	δ
4	1	0	0	ε
5	1	0	1	φ
6	1	1	0	κ
7	1	1	1	λ

$\Leftrightarrow$

Karnaughova mapa

x_2 \ $x_1 x_0$	00	01	11	10
0	$_0\alpha_{000}$	$_1\beta_{001}$	$_3\delta_{011}$	$_2\gamma_{010}$
1	$_4\varepsilon_{100}$	$_5\varphi_{101}$	$_7\lambda_{111}$	$_6\kappa_{110}$

Obr. 29

Analogicky mapu pro čtyři vstupní proměnné (viz obr. 30) je nutné chápat jako mapu nakreslenou na toru (na anuloidu).

Vytištěnou mapu bychom v tomto případě ohnuli tak, aby byl sloupeček 10 vedle sloupečku 00 a zároveň, aby řádek 10 byl vedle řádku 00.

Pro mapy pro více proměnných se geometrická interpretace hledá obtížněji - je méně názorná.

Po sestavení Karnaughovy mapy reálné úlohy je nutné v ní nalézt co největší podmapy, které jsou tvořené sousedními políčky, která mají funkční hodnotu rovnu jedné. Políčka, která odpovídají těm kombinacím vstupních logických proměnných, pro něž je funkce neurčitá, lze do podmap zahrnout - mohou totiž výrazně zjednodušit součtovou formu logické funkce. Důležité je uvědomit si, že sousední políčka Karnaughových map jsou ta, jejichž logické proměnné se liší právě v jedné položce - např. v Karnaughově mapě pro 3 proměnné (viz obr. 29) jsou sousední sloupce i sloupce 10 a 00.

To souvisí s tím, že Karnaughovy mapy je nutné chápat tak, jako by byly nakreslené na válci, na anuloidu, ...

Fakt, že hledáme podmapy s políčky, jejichž funkční hodnota je rovna jedné, je dán tím, že chceme vyjádřit logickou funkci v součtové formě. Na základě toho lze pak sestavit příslušný logický obvod.

Podmapy pro *n* vstupních logických proměnných jsou souvislé oblasti ve tvaru pravoúhelníků tvořené 2^n, 2^{n-1}, 2^{n-2}, ... až jedním políčkem. Při hledání podmap hledáme vždy ty největší - větší podmapa znamená výraznější zjednodušení logické funkce. Na základě podmap vytvoříme logickou funkci tak, že sečteme všechny mintermy, které odpovídají všem vzniklým podmapám. Do mintermu přitom zahrnujeme jen ty vstupní proměnné, které mají v dané podmapě konstantní hodnotu.

pravdivostní tabulka

Číslo řádku	x_3	x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0	0	α
1	0	0	0	1	β
2	0	0	1	0	γ
3	0	0	1	1	δ
4	0	1	0	0	ε
5	0	1	0	1	φ
6	0	1	1	0	κ
7	0	1	1	1	λ
8	1	0	0	0	μ
9	1	0	0	1	ν
10	1	0	1	0	π
11	1	0	1	1	ϑ
12	1	1	0	0	ρ
13	1	1	0	1	σ
14	1	1	1	0	τ
15	1	1	1	1	ω

$\Leftrightarrow$

Karnaughova mapa

$x_3\,x_2$ \ $x_1\,x_0$	00	01	11	10
00	0 α 0000	1 β 0001	3 δ 0011	2 γ 0010
01	4 ε 0100	5 φ 0101	7 λ 0111	6 κ 0110
11	12 ρ 1100	13 σ 1101	15 ω 1111	14 τ 1110
10	8 μ 1000	9 ν 1001	11 ϑ 1011	10 π 1010

Obr. 30

Detailněji je postup ukázán na konkrétních řešených úlohách.