Konkrétní Karnaughovy mapy pro tři proměnné

Nakreslete Karnaughovu mapu pro funkce y_0, y_1 a y_2, které jsou dány pravdivostní tabulkou (tab. 10). Minimalizujte zápis těchto funkcí s využitím a) Karnaughovy mapy, b) Booleovy algebry. Poté nakreslete schéma části logického obvodu, která odpovídá dané logické funkci.

Číslo řádku	x_2	x_1	x_0	y_0	y_1	y_2
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0
2	0	1	0	1	0	X
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	0	1	1
5	1	0	1	1	1	1
6	1	1	0	0	1	1
7	1	1	1	1	1	0

tab. 10

Karnaughova mapa pro funkci y_0 je zobrazena v tab. 11 a je zřejmé, že obsahuje tři podmapy. Můžeme tedy psát: $y_0 = \overline{x_1}x_0 + x_2x_0 + \overline{x_2}x_1\overline{x_0}$. Tuto funkci již dále není možné dále zjednodušit. Před sestavením schématu logického obvodu vytvořeného pomocí hradel NAND upravíme logickou funkci do tvaru $y_0 = \overline{x_1}x_0 + x_2x_0 + \overline{x_2}x_1\overline{x_0} = \overline{\overline{\overline{x_1}x_0 + x_2x_0 + \overline{x_2}x_1\overline{x_0}}} = \overline{\overline{\overline{x_1}x_0} \cdot \overline{x_2x_0} \cdot \overline{\overline{x_2}x_1\overline{x_0}}}$. Schéma je zobrazeno na obr. 33.

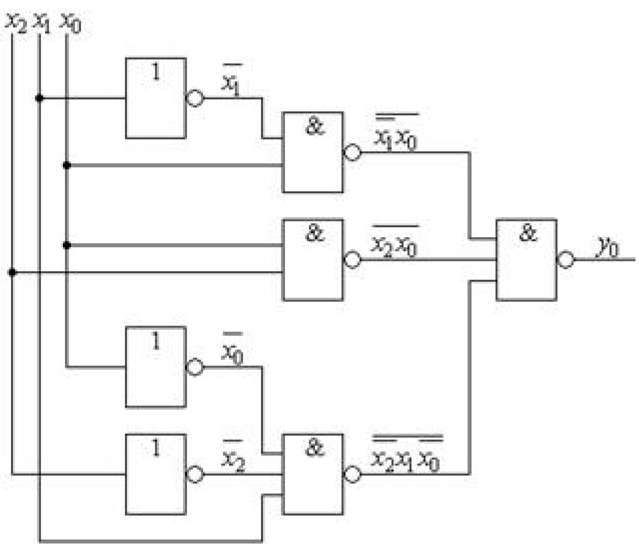
x_2 \ $x_1\ x_0$	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

tab. 11

S využitím Booleovy algebry lze z tab. 10 vypsat součet jednotlivých mintermů: $y_0 = \overline{x_2}\,\overline{x_1}x_0 + \overline{x_2}x_1\overline{x_0} + x_2\overline{x_1}x_0 + x_2x_1x_0$ a tento předpis dále upravit:

$$y_0 = \overline{x_2}\,\overline{x_1}x_0 + \overline{x_2}x_1\overline{x_0} + x_2\overline{x_1}x_0 + x_2x_1x_0 = \overline{x_2}\,\overline{x_1}x_0 + x_2\overline{x_1}x_0 + \overline{x_2}x_1\overline{x_0} + x_2\overline{x_1}x_0 + x_2x_1x_0 =$$

$= \left(\overline{x_2} + x_2\right)\overline{x_1}x_0 + \overline{x_2}x_1\overline{x_0} + \left(\overline{x_1} + x_1\right)x_2x_0 = \overline{x_1}x_0 + \overline{x_2}x_1\overline{x_0} + x_2x_0$, což je identický výraz s výrazem, který jsme získali na základě Karnaughovy mapy.



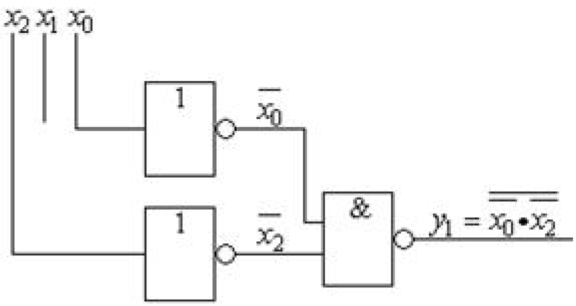
Obr. 33

Karnaughova mapa pro funkci y_1 je zobrazena v tab. 12 a je složena ze dvou podmap. Můžeme tedy psát: $y_1 = x_0 + x_2$. Pro vytvoření schématu logického obvodu pomocí hradel NAND tento předpis upravíme do tvaru: $y_1 = x_0 + x_2 = \overline{\overline{x_0 + x_2}} = \overline{\overline{x_0} \cdot \overline{x_2}}$. Schéma obvodu je zobrazeno na obr. 34.

S využitím Booleovy algebry lze psát: $y_1 = \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} x_0 + \overline{x_2} x_1 x_0 + x_2 \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} + x_2 \overline{x_1} x_0 + x_2 x_1 \overline{x_0} + x_2 x_1 x_0$, což lze dále upravit. Postupně tedy dostáváme: $y_1 = \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} x_0 + \overline{x_2} x_1 x_0 + x_2 \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} + x_2 \overline{x_1} x_0 + x_2 x_1 \overline{x_0} + x_2 x_1 x_0 =$ $= \overline{x_2} x_0 \left(\overline{x_1} + x_1\right) + x_2 \overline{x_1} \left(\overline{x_0} + x_0\right) + x_2 x_1 \left(\overline{x_0} + x_0\right) = \overline{x_2} x_0 + x_2 \overline{x_1} + x_2 x_1$. Další zjednodušování pomocí Booleovy algebry by bylo technicky náročné. Kdybychom neměly k dispozici Karnaughovu mapu této funkce, použili bychom pro sestavení schématu tento tvar logické funkce. Výhody Karnaughových map se tedy začínají projevovat.

x_2 \ $x_1 x_0$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	1

tab. 12

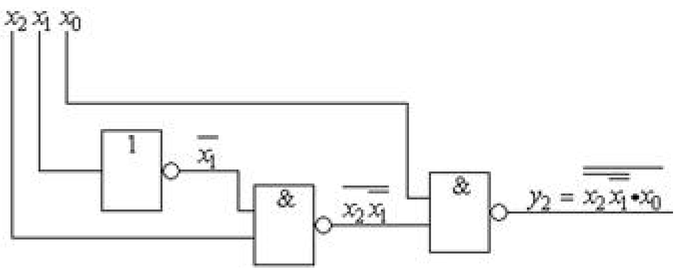


Obr. 34

Karnaughova mapa pro funkci y_2 je zobrazena v tab. 13 a je složena ze dvou podmap. V jedné z nich je zahrnuta i neurčitá funkční hodnota funkce y_2, kterou lze v tomto případě považovat za jedničku. Tím se Karnaughova mapa zjednoduší a zjednoduší se i součtový tvar zápisu funkce: $y_2 = x_2 \overline{x_1} + \overline{x_0}$. Pro sestrojení schématu logického obvodu (viz obr. 35) pomocí hradel NAND funkci ještě upravíme: $y_2 = x_2 \overline{x_1} + \overline{x_0} = \overline{\overline{x_2 \overline{x_1} + \overline{x_0}}} = \overline{\overline{x_2 \overline{x_1}} \cdot x_0}$

x_2 \ $x_1 x_0$	00	01	11	10
0	1	0	0	X
1	1	1	0	1

tab. 13



Obr. 35

Na základě Booleovy algebry lze pro funkci y_2 psát:

$$y_2 = \overline{x_2}\cdot\overline{x_1}\cdot\overline{x_0} + x_2\overline{x_1}\cdot\overline{x_0} + x_2\overline{x_1}x_0 + x_2 x_1\overline{x_0} = \left(\overline{x_2} + x_2\right)\overline{x_1}\cdot\overline{x_0} + x_2\overline{x_1}x_0 + x_2 x_1\overline{x_0} = \overline{x_1}\cdot\overline{x_0} + x_2\overline{x_1}x_0 + x_2 x_1\overline{x_0} =$$

$$= \overline{x_1}\left(\overline{x_0} + x_2 x_0\right) + x_2 x_1\overline{x_0} = \overline{x_1}\left(\overline{x_0} + x_2\right)\left(\overline{x_0} + x_0\right) + x_2 x_1\overline{x_0} = \overline{x_1}\left(\overline{x_0} + x_2\right) + x_2 x_1\overline{x_0} = \overline{x_1}\cdot\overline{x_0} + \overline{x_1}x_2 + x_2 x_1\overline{x_0} =$$

$$= \left(\overline{x_1} + x_2 x_1\right)\overline{x_0} + \overline{x_1}x_2 = \left(\overline{x_1} + x_2\right)\left(\overline{x_1} + x_1\right)\overline{x_0} + \overline{x_1}x_2 = \left(\overline{x_1} + x_2\right)\overline{x_0} + \overline{x_1}x_2 = \overline{x_1}\cdot\overline{x_0} + x_2\overline{x_0} + \overline{x_1}x_2 \,.$$

Tento tvar funkce y_2 je jiný ve srovnání s tvarem získaným na základě Karnaughovy mapy. Příčinou je skutečnost, že jsme při minimalizaci funkce pomocí zákonů Booleovy algebry nezahrnuli řádek číslo 2 z tab. 10, tj. neurčitý stav funkce y_2. Postup minimalizace funkce pomocí Karnaughovy mapy je méně pracný a výsledný součtový tvar funkce y_2 je jednodušší. A přitom lze tento tvar použít při dalším zpracování digitálních obvodů. Je v něm sice zahrnut i „problémový“ stav, ale tento stav v praxi nenastává - buď je obvod jištěn dalšími prvky a nebo se prostě do daného stavu (odpovídajícímu dané kombinaci vstupních proměnných) obvod nemůže nikdy dostat.