

Vzorkování signálu

Možnost vzorkování daného signálu vyplývá z platnosti **Shannon-Kotělnikova teoremu**:

KAŽDOU FUNKCI ČASU S OMEZENÝM FREKVENČNÍM SPEKTRÉM MŮŽEME NAHRADIT POSLOUPNOSTÍ DISKRÉTNÍCH VZORKŮ ODEBÍRANÝCH S PERIODOU T_{vz} , KTERÁ JE ROVNA NEJVÝŠE POLOVINĚ PŘEVŘÁCENÉ HODNOTY NEJVYŠŠÍ FREKVENCE f_{max} OBSAŽENÉ VE VZORKOVANÉM SIGNÁLU. PLATÍ TEDY: $f_{vz} = \frac{1}{T_{vz}} \geq 2f_{max}$, KDE f_{vz} JE VZORKOVACÍ FREKVENCE, S NÍŽ VZORKOVÁNÍ PROVÁDÍME.

Tato podmínka určující minimální hodnotu vzorkovací frekvence se nazývá také **Nyquistova podmínka**. Bude-li dodržena minimální hodnota vzorkovací frekvence při vzorkování signálu, nevznikne zkreslení typu [aliasing](#), které by způsobilo závažné a neodstranitelné strukturované rušení ve výsledném signálu.

Vzorkování signálu si můžeme představit tak, že se na [analogový signál](#) díváme přes velmi tenkou štěrbinu. Nevidíme tedy nic jiného než pouze danou hodnotu analogového signálu v čase odpovídajícímu místu, do kterého jsme přiložili štěrbinu. A kolikrát se na daný signál podíváme za jednu [sekundu](#), je určeno vzorkovací frekvencí.

V praxi se ustálilo používání těchto vzorkovacích frekvencí:

1. 32 kHz - vzorkovací frekvence pro zvukový signál, který je frekvenčně omezen na signály frekvence menší než 16 kHz (ale spíše jen menší než 15 kHz). Tato vzorkovací frekvence se používá v telekomunikacích a v levnějších komerčních zařízeních.
2. 44,1 kHz - běžná vzorkovací frekvence pro kvalitní komerční zařízení (např. [kompaktní disk](#)), ale i pro některá studiová zařízení. Uvědomíme-li si, že lidské [ucho](#) je schopno vnímat [zvuk](#) v intervalu přibližně od 20 Hz do 20 kHz, jsou vzorkovací frekvence naprosto v souladu s Nyquistovou podmínkou.

Frekvenci vyšší než 20 kHz lidské ucho vnímat běžně nedokáže, a proto by teoreticky stačila vzorkovací frekvence 40 kHz (dvojnásobek maximální frekvence, která se může v signálu vyskytnout). Skutečnost, že se používají frekvence vyšší je dáno tím, aby nebyl výsledný digitalizovaný zvuk zkreslený.

3. 48 kHz - vzorkovací frekvence používaná v moderních studiových zařízeních;
4. 96 kHz - vzorkovací frekvence používaná pro efektové procesory a některé primární záznamy.

Abychom lépe pochopili princip vzorkování, zavedeme dvě matematické funkce, které jsou pro vzorkování signálu důležité.

HEAVISIDOVA FUNKCE $h(t)$ (TZV. JEDNOTKOVÝ SKOK) JE FUNKCE DEFINOVANÁ PŘEDPÍSEM:

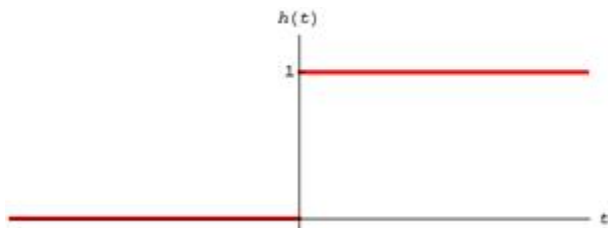
$$h(t) = 0; \text{ pro } t < 0;$$

$$h(t) = 1; \text{ pro } t > 0.$$

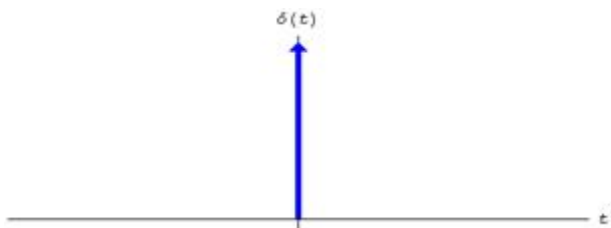
Graf této funkce je zobrazen na obr. 81.

DIRACOVA FUNKCE $\delta(t)$ (TZV. DIRACŮV IMPULS) JE DEFINOVÁNA POMOCÍ DERIVACE HEAVISIDOVY FUNKCE $h(t)$ VZTAHEM $\delta(t) = \frac{dh(t)}{dt}$, PŘIČEMŽ PLATÍ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt = 1$.

Graf Diracovy funkce je zobrazen na obr. 82.



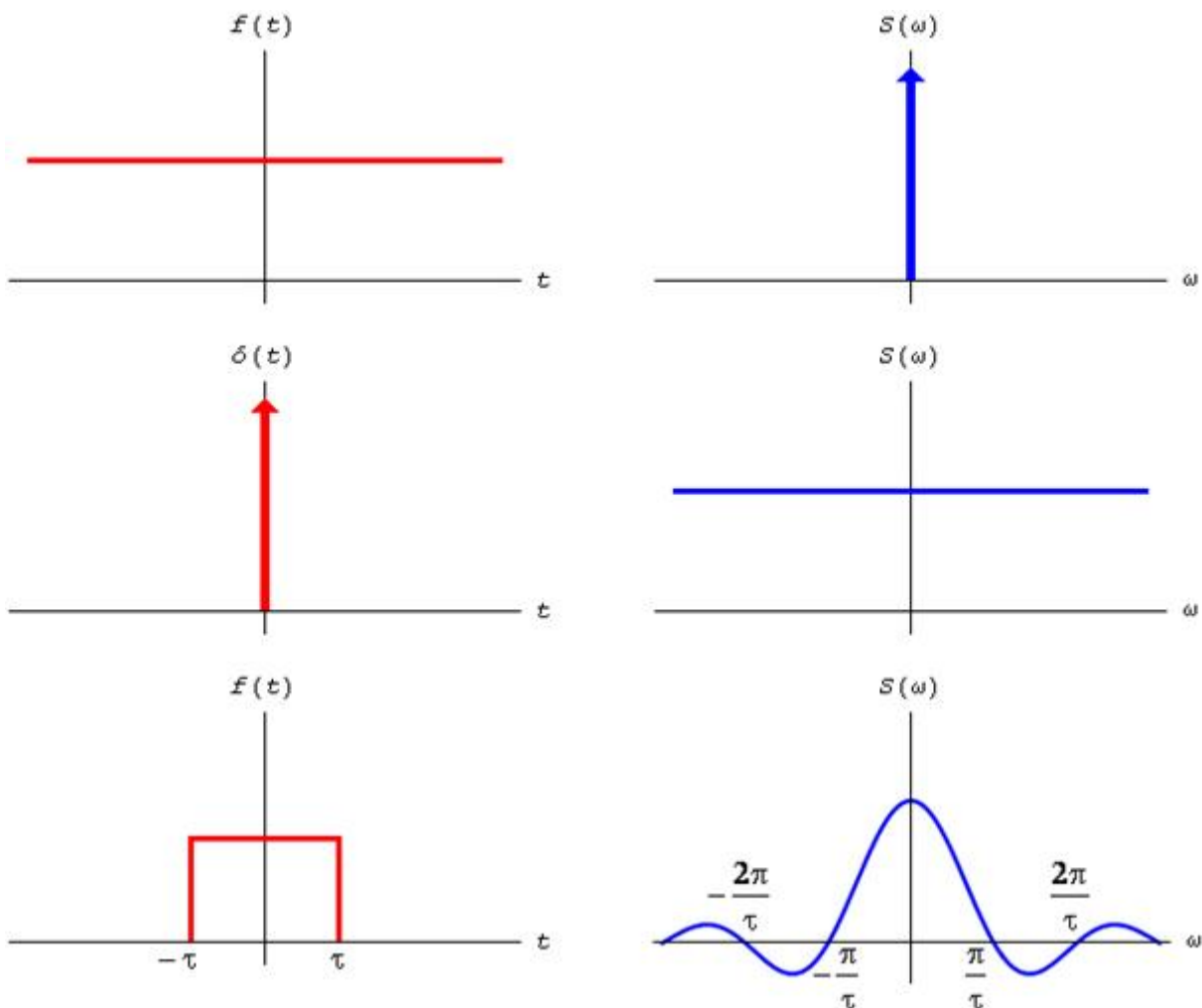
Obr. 81



Obr. 82

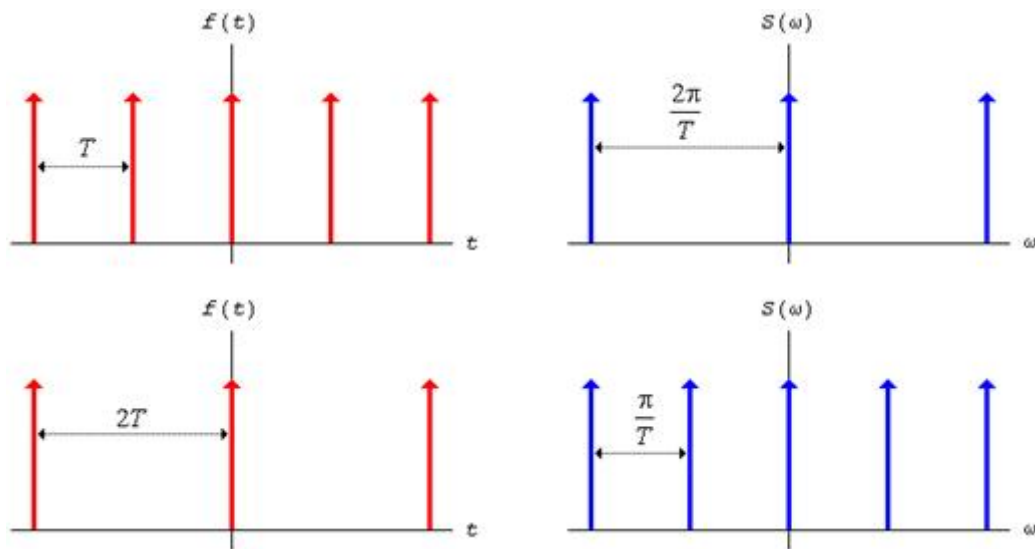
Při samotném vzorkování je důležité znát k danému průběhu signálu jeho frekvenční spektrum, tj. poměrné zastoupení signálů jednotlivých [vyšších harmonických frekvencí](#), které se ve vzorkovaném signálu vyskytují. Tato frekvenční spektra je možné najít pomocí [Fourierovy transformace](#) (resp. diskrétní Fourierovy transformace). Frekvenční spektra $S(\omega)$ k vybraným typům signálů $f(t)$ jsou zobrazeny na obr. 83. Konkrétně se jedná o tyto signály:

1. signál konstantní v čase;
2. Diracova funkce (Diracův impuls);
3. obdélníkový impuls.



Obr. 83

Budeme-li uvažovat signál ve tvaru periodické posloupnosti Diracových funkcí, bude mít takový signál [čárové spektrum](#). Perioda čárového spektra je přitom tím větší, čím je perioda posloupnosti Diracových funkcí menší (viz obr. 84).



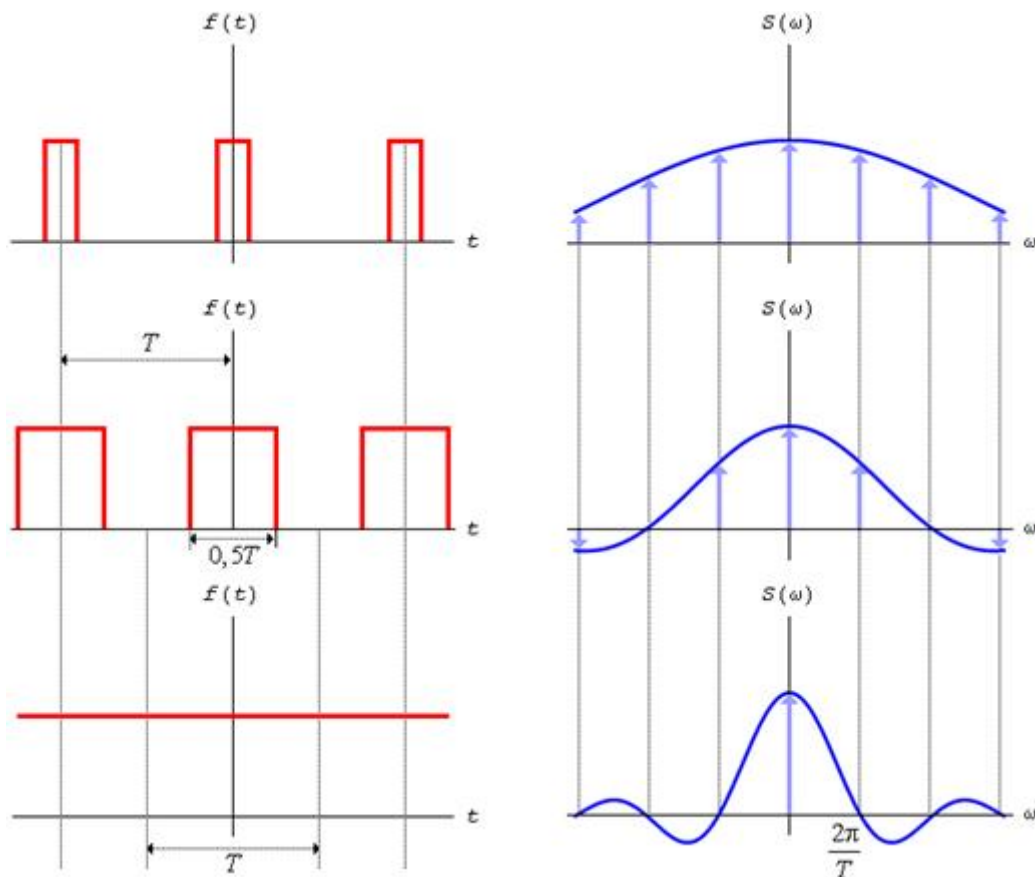
Obr. 84

Ideální vzorkování lze realizovat pouze pomocí periodických Diracových funkcí (Diracových impulsů). Ty jsou ovšem vzhledem ke své nulové šířce v praxi nerealizovatelné. Proto se vzorkování provádí pomocí periodických obdélníkových impulsů nenulové šířky. To se ale projeví pochopitelně na kvalitě vzorkovaného signálu - ten je při použití impulsů nenulové šířky vždy určitým způsobem zkreslen. Proto je nutné tyto impulsy navrhnout tak, aby vzniklé zkreslení signálu bylo přijatelné a nebylo při reprodukci výsledného [digitálního signálu](#) vnímáno.

Na obr. 85 jsou zobrazena spektra některých obdélníkových impulsů v závislosti na jejich střídě.

STŘÍDA JE DEFINOVÁNA PRO PERIODICKÉ SIGNÁLY, KTERÉ PŘECHÁZÍ MEZI DVĚMA DANÝMI ÚROVNĚMI, JAKO POMĚR DOB, VE KTERÝCH SE SIGNÁL NACHÁZÍ V JEDNOTLIVÝCH ÚROVNÍCH.

Např. střída 1:1 znamená, že se signál nachází v obou daných úrovních stejnou dobu. Tuto střídu má na obr. 85 druhý průběh.



Obr. 85

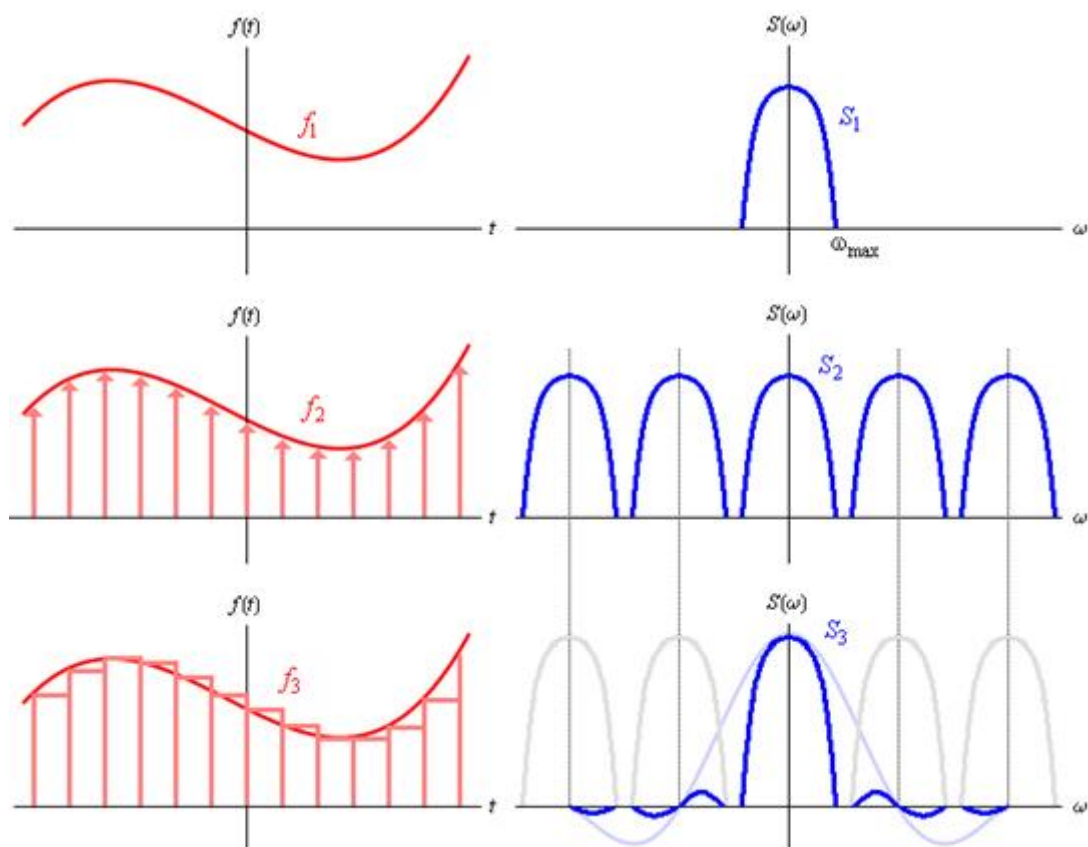
Spektra obdélníkových impulsů odpovídají spektrům periodických posloupností Diracových impulsů (zobrazených na obr. 84) vynásobených Fourierovým obrazem příslušného obdélníkového impulsu (podle obr. 83). Ve spektru druhého signálu zobrazeného na obr. 85, který má střídu 1:1, nejsou žádné sudé vyšší harmonické frekvence. Ve spektru konstantní funkce, kterou si lze teoreticky představit jako periodickou obdélníkovou funkci se střídu 1:0, je pouze složka s nulovou frekvencí (tj. stejnosměrná složka) a všechny vyšší harmonické frekvence jsou nulové.

Zjednodušeně můžeme grafy zobrazené na obr. 85 vnímat tak, že za každou vyšší harmonickou frekvenci obsaženou v průběhu funkce $f(t)$ se v grafu spektra $S(\omega)$ objeví jedna šipka u správné úhlové frekvence.

Nyní je možné popsat již celý proces diskretizace analogového signálu, tj. hledání jednotlivých diskrétních hodnot tohoto signálu, které dále projdou procesem [kvantování signálu](#) a [kódování signálu](#). Proces vzorkování je schématicky zobrazen na obr. 86. Funkce f_1 představuje vstupní analogový signál, který obsahuje frekvence od nulové frekvence až po maximální frekvenci f_{\max} . Té odpovídá úhlová frekvence $\omega_{\max} = 2\pi f_{\max}$. Spektrum S_1 tohoto signálu je rozloženo symetricky kolem počátku. Funkci f_2 získáme z funkce f_1 tak, že funkci f_1 vynásobíme řadou periodických Diracových impulsů, které splňují Nyquistovu podmínku. Spektrum S_2 je konvolucí (součinem) spektra S_1 funkce f_1 a spektra periodické Diracovy funkce (viz obr. 83). Jedná se vlastně o spektrum S_1 , které má nekonečně mnoho opakování se středy na násobcích frekvence vzorkovacích Diracových impulsů.

Ideální dolnofrekvenční propustí bychom mohli odfiltrovat základní spektrum v okolí nuly a dostali bychom nezkrácený původní analogový signál. Aplikace této dolnofrekvenční propusti se nazývá **následná filtrace (postfiltrace)**. Při nesplnění Nyquistovy podmínky se proloží horní část základního spektra s dolní částí spektra [postranního pásma](#) prvního opakování, což se projeví zkreslením signálu. Takto proložená spektra už není možné oddělit a vzniká zkreslení typu **aliasing**. Abychom zaručili, že bude Nyquistova podmínka splněna, prochází vstupní analogový signál [dolní propustí](#), která zajistí jeho frekvenční omezení. Tento proces se nazývá **předběžná filtrace** (

předfiltrace).



Obr. 86

Jak již bylo řečeno, vzorkování analogového signálu se provádí pomocí obdélníkových impulsů nenulové šířky. Průběh funkce f_3 byl získán z původního analogového signálu f_1 vzorkovaným impulsy trvajících po dobu vzorkovací periody. Spektrum S_3 je součinem spektra S_2 a spektra obdélníkového impulsu (viz obr. 83).

Výsledné spektrum je mírně zkreslené, což je dáno volbou vzorkovací frekvence. S rostoucí vzorkovací frekvencí je zkreslení menší, ale roste bitový tok výsledného digitálního signálu. Proto je nutné zvolit vzorkovací frekvenci jako kompromis mezi přijatelným zkreslením signálu a jeho bitovým tokem.

Skutečnost, že roste s vyšší vzorkovací frekvencí bitový tok je zřejmá: vyšší vzorkovací frekvence znamená více pořízených vzorků původního signálu a tedy i více informací, které se musejí zpracovat.