Frekvenční modulace

V rovnici (1) pro okamžitou hodnotu střídavého napětí můžeme považovat fázový posun φ za nulový, neboť tím se nezmění fyzikální výklad základního principu frekvenční modulace. Úhlová frekvence Ω je ovšem v tomto případě závislá na čase. Pro popis frekvenční modulace je důležitý pojem **frekvenční zdvih**.

MAXIMÁLNÍ AMPLITUDĚ NAPĚTÍ MODULAČNÍHO SIGNÁLU U_m ODPOVÍDÁ MAXIMÁLNÍ ZMĚNA NOSNÉ FREKVENCE, KTEROU NAZÝVÁME FREKVENČNÍ ZDVIH A ZNAČÍME Δf. TOMUTO FREKVENČNÍMU ZDVIHU PAK ODPOVÍDÁ ÚHLOVÁ FREKVENCE $\Delta\Omega$.

Frekvence původní vysokofrekvenční vlny (nosné vlny) se tedy mění v porovnání se svou původní hodnotou takto:

1. pro kladné okamžité hodnoty napětí se frekvence modulovaného signálu zvyšuje (v porovnání s frekvencí nosného signálu) v závislosti na amplitudě;
2. pro záporné okamžité hodnoty napětí se frekvence modulovaného signálu zmenšuje (vzhledem k frekvenci nosného signálu) v závislosti na amplitudě;
3. při přechodu z kladných okamžitých hodnot do záporných okamžitých hodnot (resp. naopak) je frekvence modulovaného signálu rovna frekvenci nosného signálu.

S rostoucí amplitudou modulačního signálu roste také maximální odchylka frekvence od frekvence nosného signálu. Tyto krajní frekvenční odchylky Δf se nazývají právě frekvenční zdvih. Počet kladných i záporných odchylek frekvence daného průběhu napětí je za dobu 1 sekundy roven frekvenci modulačního signálu.

Pro frekvenční zdvih ve shodě s uvedenou definicí můžeme tedy psát

$$\Delta f = k \cdot U_m \,, \tag{14}$$

kde U_m je amplituda modulačního signálu (modulačního napětí).

Závislost úhlové frekvence na čase můžeme definovat vztahem

$$\Omega(t) = \Omega + \Delta\Omega \cdot \cos\omega t \,. \tag{15}$$

Nyní potřebujeme určit fázi harmonického průběhu popsaném rovnicí (1). Pro tuto fázi $\Phi(t,\omega)$ můžeme (při volbě počáteční fáze $\varphi = 0$) psát $\frac{\mathrm{d}\Phi(t,\omega)}{\mathrm{d}t} = \Omega$. Proto můžeme pro fázi $\Phi(t,\omega)$ tedy psát $\Phi(t,\omega) = \int \Omega(t)\,\mathrm{d}t = \int (\Omega + \Delta\Omega \cdot \cos\omega t)\,\mathrm{d}t$.

Po integrování dostaneme

$$\Phi(t,\omega) = \Omega t + \frac{\Delta\Omega}{\omega} \cdot \sin\omega t \tag{16}$$

a před dalšími úpravami ještě definujeme parametr **modulační index frekvenční modulace** m_{FM} definičním vztahem

$$m_{FM} = \frac{\Delta\Omega}{\omega} = \frac{2\pi \cdot \Delta f}{2\pi \cdot f_m} = \frac{\Delta f}{f_m}\,, \tag{17}$$

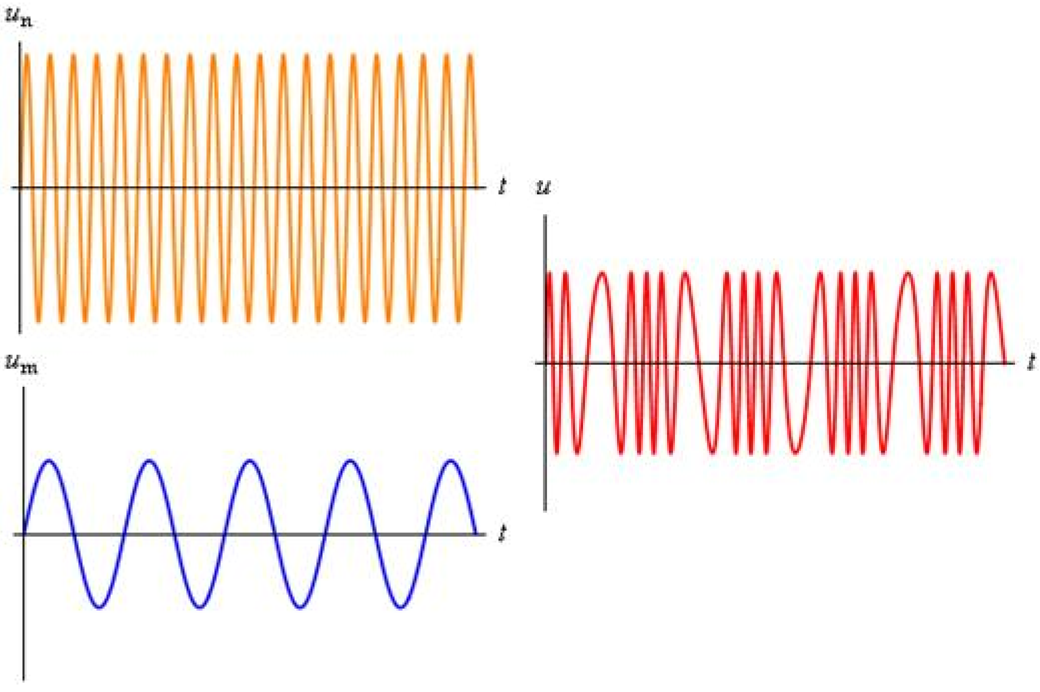
kde f_m je frekvence modulačního signálu; $[m_{FM}] = 1$.

Ve vztahu (16) by z hlediska definice primitivní funkce měl být ještě jeden člen obsahující integrační konstantu. Tu jsme ovšem vynechali, neboť ta má z fyzikálního hlediska význam počátečního fázového posunu, který jsme pro frekvenční modulaci položili rovný nule. Fázový posun totiž zásadním způsobem neovlivní ani fyzikální význam ani praktické využití frekvenční modulace.

Nyní můžeme rovnici (1) pro okamžitou hodnotu modulovaného napětí psát s využitím vztahu (16) ve tvaru $u = U_n \sin\left(\Omega t + \frac{\Delta\Omega}{\omega} \cdot \sin\omega t\right)$ a tento tvar dále přepsat s využitím vztahu (17). Získáme tak rovnici pro okamžitou hodnotu napětí ve tvaru

$$u = U_n \sin(\Omega t + m_{FM} \cdot \sin\omega t)\,. \tag{18}$$

Časové průběhy nosného signálu, modulačního signálu a výsledné modulované vlny jsou zobrazeny na obr. 135.



Obr. 135

Vztah (18) můžeme pomocí goniometrického vztahu (2) přepsat ve tvaru

$$u = U_n\left(\sin\Omega t \cdot \cos(m_{FM} \cdot \sin\omega t) + \cos\Omega t \cdot \sin(m_{FM} \cdot \sin\omega t)\right). \tag{19}$$

Výrazy $\sin(m \cdot \sin\omega t)$ a $\cos(m \cdot \sin\omega t)$, ve kterých místo symbolu m_{FM} budeme v rámci zjednodušení psát pouze symbol *m*, vystupující ve vztahu (19) můžeme přepsat s využitím tzv. Besselových funkcí I. druhu $J_n(m)$ ve tvarech

$$\sin(m \cdot \sin\omega t) = 2J_1(m)\sin\omega t + 2J_3(m)\sin 3\omega t + 2J_5(m)\sin 5\omega t + \dots \tag{20}$$

a

$$\cos(m \cdot \sin\omega t) = J_0(m) + 2J_2(m)\cos 2\omega t + 2J_4(m)\cos 4\omega t + \dots . \tag{21}$$

Ve vztahu (20) jsou tedy Besselovy funkce I. druhu lichého řádu a jsou násobené sinem, v jehož argumentu vystupují liché vyšší harmonické frekvence. Ve vztahu (21) se analogicky vyskytují Besselovy funkce sudého řádu a funkce kosinus. V jejich argumentech jsou sudé vyšší harmonické frekvence. Člen $J_0(m)$ představuje stejnosměrnou složku a je to vlastně člen $J_0(m)\cos 0\omega t$, protože $\cos 0\omega t = \cos 0 = 1$.

Besselovy funkce I. druhu jsou funkce *n*-tého řádu s argumentem *m*, kterým je v tomto případě modulační index m_{FM}. Pro celočíselná *n* je funkce $J_n(m)$ definovaná vztahem

$$J_n(m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{m}{2}\right)^{n+2k}}{k! \cdot (n+k)!} . \tag{22}$$

Dosazením vztahů (20) a (21) do vztahu (19) získáme vztah: $u = U_n\left(\sin\Omega t \cdot \left(J_0(m) + 2J_2(m)\cos 2\omega t + \dots\right) + \cos\Omega t \cdot \left(2J_1(m)\sin\omega t + 2J_3(m)\sin 3\omega t + \dots\right)\right)$. Dále můžeme psát: $u = U_n\left(J_0(m)\sin\Omega t + 2J_2(m)\sin\Omega t \cdot \cos 2\omega t + \dots + 2J_1(m)\cos\Omega t \cdot \sin\omega t + 2J_3(m)\cos\Omega t \cdot \sin 3\omega t + \dots\right)$. V tomto vztahu se (až na první člen) vyskytují vždy členy dané součinem příslušné Besselovy funkce a součinem sinu a kosinu různých argumentů. Součin sinu a kosinu různých argumentů můžeme pomocí vyjádřit pomocí goniometrického vztahu

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right) \tag{23}$$

a dostaneme vztah $u = U_n\left(J_0(m)\sin\Omega t + J_2(m)\sin(\Omega+2\omega)t + J_2(m)\sin(\Omega-2\omega)t + J_1(m)\sin(\Omega+\omega)t + J_1(m)\sin(\omega-\Omega)t + \dots\right)$ a ten můžeme ještě s využitím faktu, že funkce sinus je lichá funkce, přepsat do tvaru

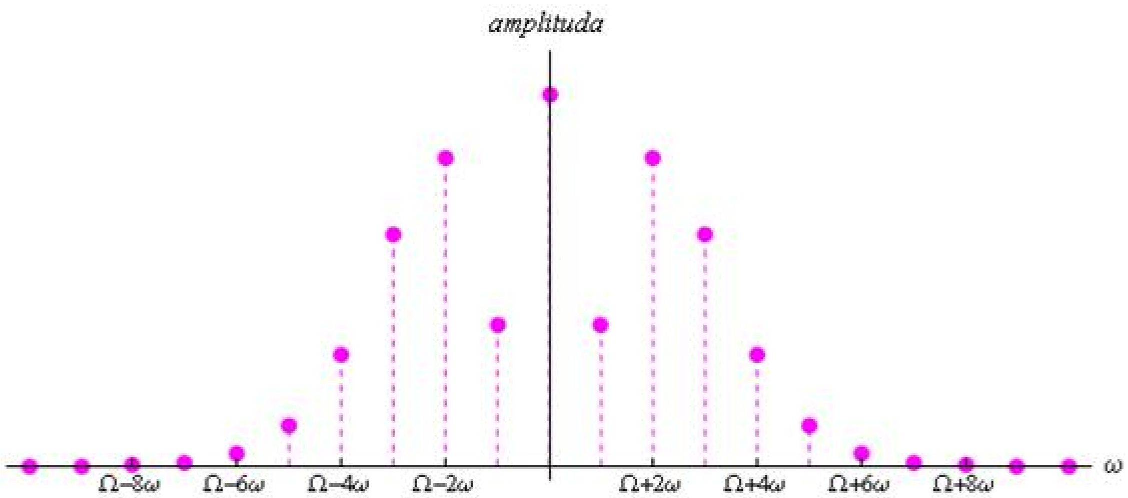
$$u = U_n\left(J_0(m)\sin\Omega t + J_2(m)\sin(\Omega+2\omega)t + J_2(m)\sin(\Omega-2\omega)t + J_1(m)\sin(\Omega+\omega)t - J_1(m)\sin(\Omega-\omega)t + \dots\right). \tag{24}$$

Přepsali jsme tedy ty členy, v nichž se vyskytl ve funkci sinus argument $\omega - \Omega$, tak, aby tento argument měl tvar $\Omega - \omega$. Na základě této úpravy pak budeme moci lépe definovat frekvenční spektrum daného signálu.

Z tohoto tvaru rovnice pro okamžitou hodnotu napětí je zřejmé, že frekvenční spektrum tohoto signálu obsahuje diskrétní úhlové frekvence s hodnotami Ω, $\Omega \pm \omega$, $\Omega \pm 2\omega$, $\Omega \pm 3\omega$, $\Omega \pm 4\omega$, ... Z toho ovšem vyplývá, že modulace nosného signálu modulačním signálem o jedné modulační úhlové frekvenci ω vytvoří ve frekvenčním spektru teoreticky nekonečně mnoho postranních úhlových frekvencí, které jsou rozmístěny symetricky od nosné úhlové frekvence Ω (viz obr. 136). Poloha těchto úhlových frekvencí je dána celočíselnými násobky modulační úhlové frekvence ω. Amplitudy nosné vlny i jednotlivých signálů, jejichž úhlová frekvence je dána jednou z postranních úhlových frekvencí, jsou dány hodnotami Besselových funkcí I. druhu, jejichž argumentem je modulační index m_{FM}. Směrem od nosné úhlové frekvence amplitudy jednotlivých signálů klesají, ale ne monotónně - pro některé konkrétní hodnoty modulačního indexu může být příslušná amplituda i nulová nebo mohou být amplitudy signálů o frekvenci bližší středu frekvenčního spektra nižší než amplitudy signálů s frekvencemi vzdálenějšími od středu spektra. Podobně se může stát, že bude nulová hodnota Besselovy funkce odpovídající nosné úhlové frekvenci.

Frekvenční spektrum tedy může být „zubaté“: amplitudy signálů s jednotlivými vyššími harmonickými frekvencemi nemusejí pouze klesat.

Úhlové frekvence, kterým odpovídá nulová hodnota Besselovy funkce, se pak ve spektru prostě nezobrazí.



Obr. 136

Vlivem poklesu hodnot Besselových funkcí pro postranní frekvence, klesají postupně i amplitudy jednotlivých vyšších harmonických složek a klesá tedy i jejich vliv na kvalitu přenosu.

Složka s nižší amplitudou se uplatní v rovnici (18) resp. (24) pro okamžitou hodnotu napětí méně. A bude-li její amplituda téměř nulová, nebude přispívat k celkovému průběhu napětí téměř vůbec.

Pro dostatečně kvalitní přenos informace pak stačí přenášet pouze několik prvních postranních složek signálu. Jejich minimální počet nutný pro kvalitní přenos signálu závisí na hodnotě modulačního indexu a povoleném zkreslení signálu. Pro kvalitní přenos je nutné zajistit modulační index s hodnotou 3 až 5. Nižší hodnoty způsobují obecně vyšší zkreslení, vyšší pak zhoršuje rozestup signálu od šumu.

Odstup signálu od šumu je důležitý pro správnou reprodukci samotného signálu (zvuk, obraz, ...). Proto je nutné, aby se amplituda signálu od amplitudy šumu co nejvíce ABSOUTNĚ lišila. Důležitý je opravdu absolutní rozdíl a ne relativní rozdíl.

Pro zlepšení šumových poměrů při přenosu pomocí frekvenční modulace se běžně do signálové cesty zařazují obvody pro zvýšení amplitudy signálů vyšších frekvencí modulačního spektra.

Pro praktické aplikace se používá frekvenční modulace s těmito parametry:

1. FM rozhlas mono - $f_{max} = 15\ \mathrm{kHz}$, $\Delta f = 75\ \mathrm{kHz}$ a $m_{FM} = 5$;

2. FM rozhlas stereo - $f_{max} = 53\ \mathrm{kHz}$, $\Delta f = 75\ \mathrm{kHz}$ a $m_{FM} = 1{,}42$;
3. zvuk pro televizní vysílání - $f_{max} = 15\ \mathrm{kHz}$, $\Delta f = 50\ \mathrm{kHz}$ a $m_{FM} = 3{,}33$.

Potřebná šířka přenosového pásma *B* je závislá na modulačním indexu. Pro hodnotu $m_{FM} = 5$ se uvádí empirický vztah

$$B \geq 2\left(\Delta f + 2 f_{max}\right). \tag{25}$$

Empirický vztah znamená, že tento vztah nebyl odvozen na základě fyzikálních zákonů, ale byl odpozorován (vyzkoušen) na základě praktické zkušenosti.

Pro FM rozhlas mono tak postačuje šířka přenosového pásma 150 kHz až 180 kHz, pro FM rozhlas stereo pak postačuje šířka pásma 250 kHz až 300 kHz (to je dáno tím, že v tomto případě je modulační index nižší).

Frekvenční modulace se velmi výrazně uplatňuje v radiokomunikační praxi, v pozemních radioreléových spojích, při komunikaci s telekomunikačními družicemi, u družic pro přímé vysílání k divákovi (tzv. RDS), v pásmu VHF pro kvalitní přenos zvuku, pro přenos zvuku pro televizní vysílání, ... Frekvenční modulace je důležitá i pro FM syntézu, která se využívá u syntezátorů a která se využívá pro syntézu zvuku ve zvukových kartách. Bez frekvenční modulace by se neobešel magnetický záznam obrazu, u kterého se používá s malým modulačním indexem pro snížení oktávového rozsahu zaznamenávaného signálu (přibližně z 18 oktáv na méně než 3 oktávy).

Podle hodnoty modulačního indexu rozeznáváme:

1. úzkopásmovou modulaci - frekvenční modulace, pro kterou platí $m_{FM} < 1$; používá se např. u radioamatérských stanic;
2. širokopásmovou modulaci - frekvenční modulace, pro níž platí $m_{FM} > 1$ a která se používá např. při vysílání rozhlasu na VKV.

Výhodou frekvenční modulace je její dobrá odolnost proti kolísání úrovně signálu, neboť amplituda není v tomto případě nositelem informace (amplituda je nositelem informace u amplitudové modulace).