Eukleidovo dílo

V alexandrijské knihovně se zachovalo několik Eukleidových spisů, kterými byly většinou přehledy známých matematických výsledků s jeho vlastními doplňky a komentáři. Jednalo se zejména o knihy *Data* o výpočetních postupech s více než 80 Eukleidovými původními matematickými větami, *Optika*, v níž položil základy perspektivy, a *Základy hudby*, v nichž shrnul a dopracoval výsledky pythagorejců. Je autorem vět o výšce a odvěsně v pravoúhlém trojúhelníku, dokázal, že prvočísel je nekonečně mnoho a že $\sqrt{2}$ není racionální číslo. Oba tyto výsledky, které jsou pro matematiku velmi důležité, dokázal velmi elegantně sporem. Tento typ důkazu si Eukleides totiž velmi oblíbil.

Eukleidova věta o výšce v pravoúhlém trojúhelníku zní:

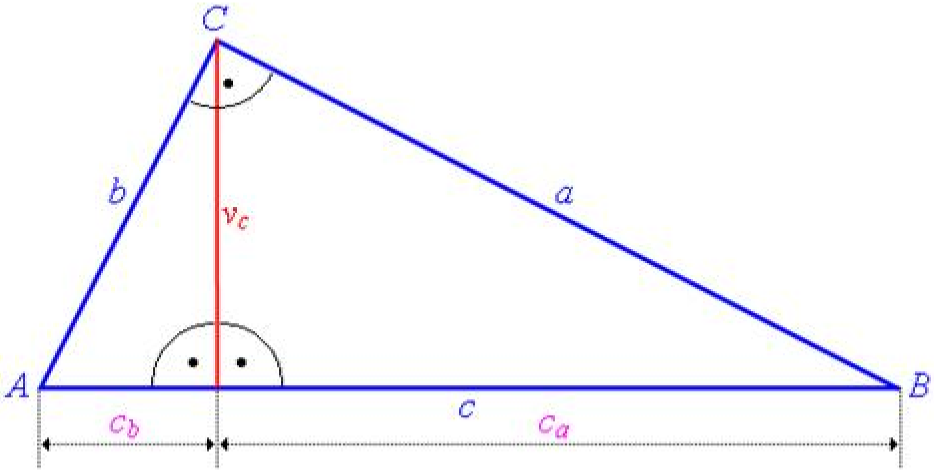
V KAŽDÉM PRAVOÚHLÉM TROJÚHELNÍKU JE OBSAH ČTVERCE SESTROJENÉHO NAD VÝŠKOU K PŘEPONĚ ROVEN OBSAHU OBDÉLNÍKA, JEHOŽ STRANY TVOŘÍ ÚSEKY PŘEPONY ROZDĚLENÉ TOUTO VÝŠKOU.

V současném zápise tedy můžeme psát: $v_c^2 = c_a \cdot c_b$.

Eukleidova věta o odvěsně pravoúhlého trojúhelníka zní:

V KAŽDÉM PRAVOÚHLÉM TROJÚHELNÍKU JE OBSAH ČTVERCE SESTROJENÉHO NAD ODVĚSNOU ROVEN OBSAHU OBDÉLNÍKA, JEHOŽ STRANY TVOŘÍ PŘEPONA A ÚSEK PŘEPONY PŘILEHLÝ K DANÉ ODVĚSNĚ.

V současném zápise tedy platí: $a^2 = c \cdot c_a$ resp. $b^2 = c \cdot c_b$.



Obr. 59

Jeho nejslavnějším dílem, které ovlivnilo matematiku na dalších 2000 let, jsou slavné *Základy* (v latinském překladu *Principia*, řecky *Stoicheia*). Toto dílo neobsahuje příliš původních Eukleidových myšlenek, ale je významné tím, že uspořádal výklad do té doby známých znalostí z matematiky. Navíc toto dílo buduje axiomaticky.

Základy tvoří 13 knih a úvod obsahuje úvod obsahuje 23 výměr (definic), 5 úkonů prvotních (postulátů) a 9 zásad (axiomů). Náplní jednotlivých knih je:

1. 1. kniha - obsahuje trojúhelníky, rovnoběžky, konstrukční úlohy, ...; končí důkazem Pythagorovy věty, kterou Euklides formuloval obecněji:

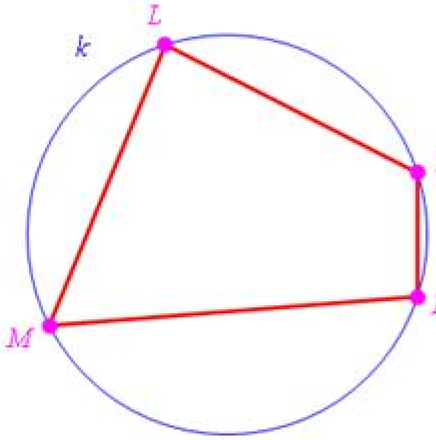
OBSAH LIBOVOLNÉHO OBRAZCE SESTROJENÉHO NAD PŘEPONOU PRAVOÚHLÉHO TROJÚHELNÍKA JE ROVEN SOUČTU OBSAHŮ STEJNÝCH OBRAZCŮ SESTROJENÝCH NAD OBĚMA ODVĚSNAMI. TYTO OBRAZCE MUSÍ BÝT VE STEJNÉM POMĚRU JAKO JSOU STRANY TROJÚHELNÍKA.

2. 2.kniha - zabývá se planimetrií (geometrie rovinných útvarů) a geometrickou algebrou;
3. 3. kniha - pokračuje planimetrie: 37 poznatků o kruzích, důkaz tvrzení, že jakýkoliv

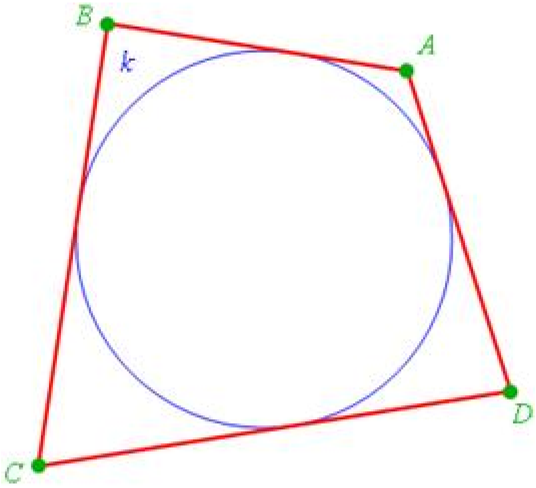
úhel vepsaný to půlkruhu je pravý, ...;

4. 4. kniha - pokračuje planimetrie: pravidelné mnohoúhelníky, tětivové mnohoúhelníky a tečnové mnohoúhelníky (na obr. 60 je zobrazen tětivový čtyřúhelník a na obr. 61 je zobrazen tečnový čtyřúhelník);

Některými vlastnostmi tětivových čtyřúhelníků se zabýval také Klaudios Ptolemaios.



Obr. 60



Obr. 61

5. 5.kniha - zabývá se poměry, teorie proporcí měla odstranit problémy s objevem pythagorejců: nesouměřitelnost úseček;

V 19. století byl tento problém vyřešen zavedením reálných čísel.

6. 6. kniha - uzavírá výklad planimetrie;
7. 7. - 9. kniha - výklad teorie čísel, prvočísla a důkaz, že jich je nekonečně mnoho, dokazuje iracionalitu některých čísel, je zde uveden Eukleidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou čísel. Zde se projevuje daleko více než v ostatních knihách problém spojený se zápisem: Eukleides totiž vše vykládá na základě geometrie a délek úseček (jak bylo v řecké matematice při geometrickém řešení úloh zvykem.
8. 10. kniha - je věnovaná měření;
9. 11. kniha - obsahuje stereometrii: 39 tvrzení o základech geometrie protínajících se ploch;
10. 12. kniha - rozvíjí studium z předchozí knihy: důkaz tvrzení, že obsah kruhu je přímo úměrný poloměru kruhu, ...;
11. 13. kniha - uzavírá dílo; pokračuje ve stereometrii: pravidelné mnohostěny (včetně věty, že jich je jen pět), objemy těles, ...

V *Základech* se také na několika místech objevuje zlatý řez. První zmínka je ve druhé knize v souvislosti s obsahy rovinných útvarů. Přesnější definice je uvedena v 6. knize v souvislosti s úměrami. Eukliedes pak využívá zlatý řez dále a to zejména k sestrojení pětiúhelníku (ve 4. knize) a ke konstrukci dvanáctistěnu a dvacetistěnu (ve 13. knize).

Celé dílo je založeno na systému axiomů a právě proto se *Základy* staly základním učebním textem nejen pro moderní matematiku. Každý důkaz lze redukovat na axiomy dané teorie. Tato axiomatická výstavba matematiky se stala vzorem i pro ostatní obory vědy. A to i přesto, že se postupem času ukázalo, že systém jeho pěti postulátů není úplný a na důkaz některých jednoduchých tvrzení nestačí.

Skutečnost, že geometrii je věnováno 9 ze 13 knih svědčí o tom, jaký význam geometrie pro tehdejší matematiku měla.

Euklidovy úvahy vypadají, jako kdyby znal základy infinitezimálního počtu, který ovšem zavedli až v 17. století Newton a Leibnitz.

„*Ke geometrii (k matematice) nevedou žádné královské cesty!*“ odpověděl králi Ptolemaiovi na dotaz, zda existuje nějaká snadná cesta, jak se naučit geometrii (matematiku) než z jeho *Základů*.

Na obr. 62 je zobrazena titulní strana prvního anglického vydání *Základů*.

Obr. 62