Neřešitelné matematické úlohy

Matematika získala od řeckých matematiků spoustu znalostí, které se dále rozvíjely, inspirativních neznalostí, ale také několik slavných úloh, které matematiku zaměstnávaly zhruba dva tisíce let. Dnes jsou již vyřešeny (většinou negativně, tj. je dokázáno, že jejich řešení neexistuje), ale přesto se občas najdou lidé, kteří zkouší řešení nalézt. Tyto úlohy jsou tři nebo čtyři - záleží na podání různých autorů, neboť dvě z nich jsou velmi podobné. Všechny tyto úlohy ve svém zadání vyžadují, aby se pouze rýsovaly (tak, jak je typické pro řeckou matematiku) a to jen s využitím pravítka a kružítka. Není povoleno žádné měření, žádná pravítka se stupnicí, ... Jedná se tedy o tzv. eukleidovské řešení.

Slavnými neřešitelnými úlohami řecké matematiky jsou:

1. Zdvojení krychle: Je dána krychle. Úkolem je vyrobit novou krychli, která má přesně dvojnásobný objem ve srovnání se zadanou krychlí. V současném zápisu je tedy třeba ke krychli s hranou délky *a* sestrojit krychli s hranou délky $a\sqrt[3]{2}$.

S touto úlohou se pojí i motivační historka: v jakémsi městě řádil mor a Orákulum v Delfách poradilo, že epidemie odejde, pokud bude oltář v místním chrámu přesně zdvojnásoben. A oltář měl tvar krychle.

2. Trisekce úhlu: Rozdělte obecný úhel na tři přesně stejné díly.
3. Kvadratura kruhu: Je dán kruh. Sestrojte čtverec, který má přesně stejný obsah. V současné symbolice to znamená ke kruhu o poloměru *r* sestrojit čtverec o straně délky $r\sqrt{\pi}$.
4. Rektifikace kružnice: K dané kružnici sestrojte úsečku stejné délky, jako je délka kružnice. To znamená, že k danému poloměru *r* je nutné sestrojit úsečku délky $2\pi r$.

Jedná se tedy o opakování úlohy o kvadratuře kruhu „v první mocnině“.

Až v moderní době se podařilo dokázat, že žádná z uvedených úloh není řešitelná. Hlavním argumentem byla věta francouzského matematika Pierre Laurenta Wantzela (1814 - 1845), kterou uveřejnil v roce 1837 v *Journal de Mathématique*. Podle této věty je možné eukleidovskou konstrukcí geometricky provádět pouze početní operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a druhou odmocninu. Nic jiného!

Přitom zdvojení krychle a trisekce úhlů vedou na výpočet třetí odmocniny.

Neřešitelnost zbývajících úloh nezakazuje Wantzelova věta, ale vlastnosti čísla π. V roce 1761 dokázal poměrně komplikovaným způsobem německý matematik Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777), že π je iracionální. Fakt, že číslo π je iracionální by eukleidovskou konstrukci ještě nevylučoval (číslo $\sqrt{2}$ je také iracionální a přesto je možné ho sestrojit). V roce 1882 ale dokázal německý matematik Ferdinand Lindemann (1852 - 1939), že π není řešením žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty a celočíselnými mocninami. Dokázal tak, že číslo π není algebraické číslo, ale transcendentní číslo.

Uvedené úlohy nejsou sice řešitelné eukleidovskou konstrukcí, jsou ovšem řešitelné s využitím vhodně „zakřivených pravítek“ nebo postupem, který sice není absolutně přesný, ale jehož teoretická přesnost je vyšší než přesnost sebepečlivějšího rýsování. To už ovšem není ona původní řecká úloha.