

Řešení algebraických rovnic

Pomocí [geometrického řešení](#) lze řešit i úlohy, které v současnosti zapisujeme algebraicky a tak je i řešíme. Při tomto postupu je nutné si uvědomit, že [řecká matematika](#) byla schopna řešit pouze takové rovnice, ve kterých byl dodržen [zákon homogenity](#).

Geometricky byli [Řekové](#) schopni řešit rovnice těchto typů:

1. $ax = b^2$;
2. $x^2 = ab$;
3. $ax - x^2 = b^2$;
4. $ax + x^2 = b^2$;

Volbou $b = a$ přejde tato rovnice na rovnici $ax + x^2 = a^2$, která popisuje tzv. [zlatý řez](#).

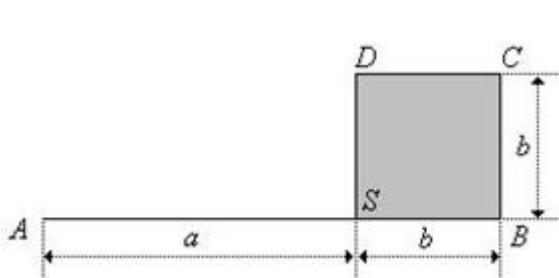
5. $x^2 - ax = b^2$.

Těmito typy kvadratických rovnic jsou reprezentovány všechny kvadratické rovnice, které mohli Řekové řešit. Řekové neznali záporná čísla a tedy [veličiny](#) a , b a hledaná veličina x v uvedených rovnicích představují kladné veličiny - délky úseček.

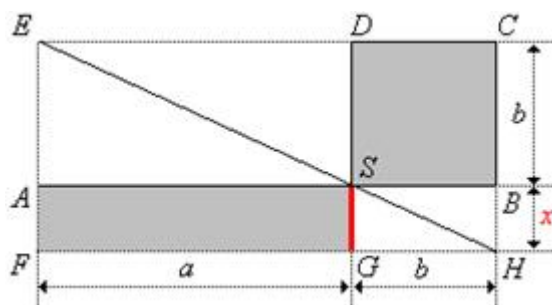
V současné době máme „jednu“ kvadratickou rovnici ve tvaru $Ax^2 + Bx + C = 0$, kterou umíme obecně řešit. Výše uvedené rovnice jsou pak speciálními případy této obecné rovnice (i pro případ $A = 0$, který se v současné terminologii mezi kvadratické rovnice nepočítá). Pro řečky bylo ale výše uvedených pět rovnic různých - nezapisovali je [matematickou symbolikou](#) jako my, ale slovně. Proto je navzájem nespojovali v jeden typ rovnice.

Jako ukázkou popíšeme řešení dvou z výše uvedených rovnic.

Rovnice $ax = b^2$ je lineární rovnice a představuje tuto geometrickou úlohu: Hledáme délku strany obdélníka s jednou stranou o délce a , jehož obsah je roven obsahu daného čtverce se stranou délky b . Geometrické řešení je zobrazené na obr. 15 a obr. 16. K úsečce AS délky a „přiložíme“ čtverec $SBCD$ o straně délky b (viz obr. 15). Tento obrázek doplníme na obdélník $CEFH$ (viz obr. 16). Postup doplnění na obdélník je zřejmý: v bodě A sestrojíme kolmici k na úsečce AS , která protne polopřímku CD v bodě E . Polopřímka ES protne polopřímku CB v bodě H . Nyní vedeme bodem H rovnoběžku s úsečkou AS ; tato rovnoběžka protne kolmici k v bodě F . Tak získáme všechny vrcholy obdélníka $CEFH$.



Obr. 15



Obr. 16

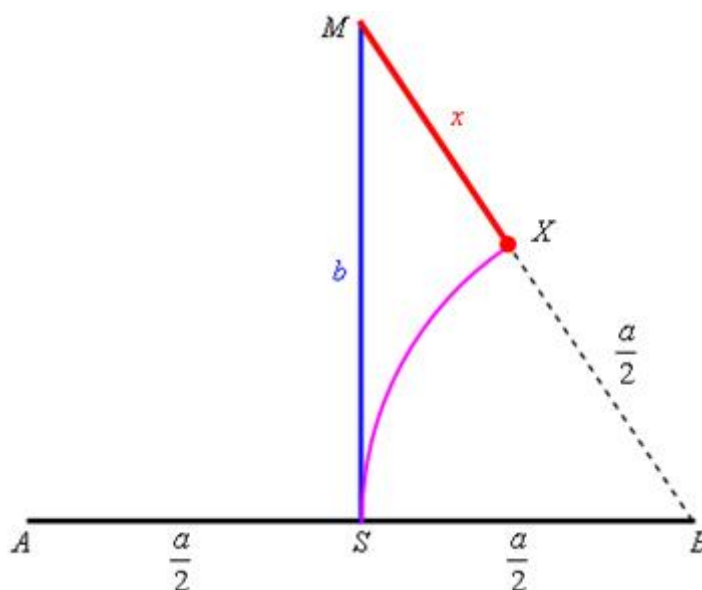
Úhlopříčka EH půlí obdélník $CEFH$, ale také obdélníky $ASDE$ a $GHBS$. Trojúhelníky FHE a CEH mají tedy stejný obsah. Trojúhelník FHE je složen z trojúhelníků ASE a GHS a obdélníka $FGSA$, trojúhelník CEH je složen z trojúhelníků DES a BSH a čtverce $SBCD$. Vzhledem k tomu, že trojúhelníky ASE a DES jsou navzájem shodné a trojúhelníky GHS a BSH jsou navzájem také shodné, má čtverec $SBCD$ stejný obsah jako obdélník $FGSA$. Proto je úsečka GS hledanou neznámou x .

Naprostou stejným postupem by se řešila i rovnice $ax = bx$.

V současné době bychom úlohy těchto typů řešili spíše pomocí [Eukleidových vět](#) (konkrétně pomocí [Eukleidovy](#) věty o odvěsně).

Nyní se podíváme na řešení kvadratické rovnice $ax + x^2 = b^2$. Narýsujeme úsečku AB délky a a v jejím středu S sestrojíme kolmici SM o délce b (viz obr. 17). Dále sestrojíme kružnici se středem v bodě B , která prochází bodem S (tj. tato [kružnice](#) má poloměr rovný polovině délky úsečky AB). Průsečík této kružnice s úsečkou MB označíme X . Délka úsečky MX představuje řešení zadané rovnice.

Druhý kořen řešené rovnice je záporný, takže jej Řekové neuvažovali. Nicméně i ten lze získat na základě popsané konstrukce: jeho absolutní hodnota je dána součtem délek úseček AB a MX .



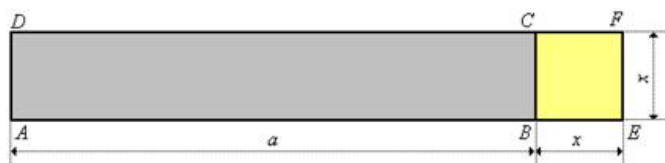
Obr. 17

Právě popsaná konstrukce vychází z jiné geometrické úvahy. Výraz $ax + x^2$ vystupující na levé straně řešené rovnice můžeme chápat jako součet obsahů obdélníka $ABCD$ se stranami délek a a x a čtverce $BEFC$ se stranou délky x (viz obr. 18).

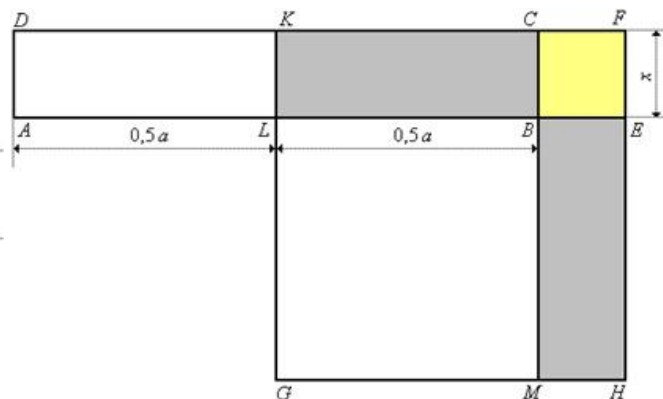
Uvažujme dále čtverec $GHFK$, kde K je střed úsečky CD (viz obr. 19). Potom obdélníky $ALKD$ a $HEBM$ jsou shodné. Obsah gnómu $HFKLBM$ je proto roven obsahu obdélníka $AEFD$. Čtverec $GHFK$ má stranu délky $\frac{a}{2} + x$ a tedy má obsah $\left(\frac{a}{2} + x\right)^2$. Tento čtverec je rozdělen na čtverec $GMBL$ se stranou délky $\frac{a}{2}$ a tedy o obsahu $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ a na gnómon $HFKLBM$ o obsahu $ax + x^2 = b^2$. Proto platí:

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2.$$

Tento vztah přitom vyjadřuje [Pythagorovu větu](#) pro pravoúhlý trojúhelník SBM na obr. 17. Proto je výše uvedený postup nalezení řešení zakreslený právě na obr. 17 matematicky korektní.



Obr. 18



Obr. 19

Geometrické úvahy, kterými Řekové zdůvodňovali geometrické konstrukce použité při řešení úloh, se nazývají **příkládání ploch**. Toto příkládání může být trojí:

1. eliptické příkládání - slovo *elleipsis* znamená *nedostatek*;

Týká se řešení rovnice $ax - x^2 = b^2$, v němž se od obsahu obdélníka o stranách délky a a x odečítá obsah čtverce o straně délky x . Obsah obdélníka vystupující na levé straně rovnice má „nedostatek“ (tj. kus mu chybí).

2. hyperbolické příkládání - slovo *hyperbolé* znamená *přebytek*;

Při řešení rovnice $ax + x^2 = b^2$ má obsah obdélníku vystupujícího na levé straně rovnice „přebytek“ (tj. má kus navíc - má navíc čtverec o obsahu x^2).

3. parabolické příkládání - slovo *parabolé* znamená *přiložení*.

Tento typ příkládání se týká řešení rovnice $ax = b^2$.

Nahradíme-li v rovnicích $ax - x^2 = b^2$, $ax + x^2 = b^2$ a $ax = b^2$ písmeno b písmenem y , přejdou tyto rovnice na rovnici jedné z kuželoseček. V uvedeném pořadí získáme rovnici [elipsy](#), [hyperboly](#) a paraboly.

Výše uvedené úvahy jsou založeny pouze na Pythagorově větě; Eukleidovy věty nebyly použity. Možná to znamená, že úvahy vedoucí k výše uvedeným řešením byly prováděny ještě před objevením Eukleidových vět.