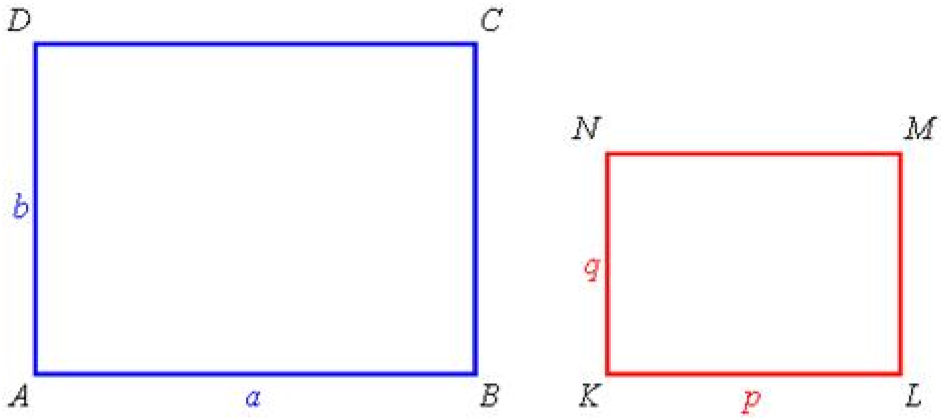
Úměry

Velkou pozornost věnovali Řekové při geometrickém řešení úloh poměrům a úměrám. Patrně zde hrála roli také podobnost geometrických útvarů. Jsou-li např. dva obdélníky *ABCD* a *KLMN* o stranách *a*, *b* a *p*, *q* podobné (viz obr. 20), platí vztah $a:b = p:q$ resp. $a:p = b:q$.



Obr. 20

Poměry v současné době zapisujeme pomocí zlomků. **Úměra** (tj. rovnost dvou poměrů resp. zlomků) pak znamená, že z jednoho zlomku se k druhému dostaneme krácením, rozšiřováním nebo oběma operacemi provedenými po sobě. Úměru můžeme chápat (stejně jako Řekové) geometricky: z jednoho obdélníka se k druhému dostaneme jeho zmenšením, zvětšením nebo aplikací obou těchto operací. Pro krácení a rozšiřování (resp. zmenšování a zvětšování) přitom používáme pouze celá čísla (resp. celočíselné koeficienty); to je totiž v souladu s vnímáním čísel starými Řeky (zejména Pythagorejci).

Budeme-li uvažovat např. úměru 16:4 = 20:5, tak od poměru 16:4 přejdeme krácením číslem 4 k poměru 4:1 a od tohoto poměru přejdeme k poměru 20:5 rozšířením číslem pět.

Pro Řeky nebyl problém:

1. zjistit, zda jsou si dva dané poměry rovny;
2. převést poměr $a:b$ na poměr $x:c$ resp. $c:x$, kde číslo c bylo dáno, a zjistit, pro jaké c je takový poměr vůbec možný.

Toto vše bylo možné zvládnout (řečeno současnou terminologií) s využitím krácení a rozšiřování zlomků.

Obtížnější bylo nalézt k daným číslům *a* a *b* takové číslo *x*, aby platilo

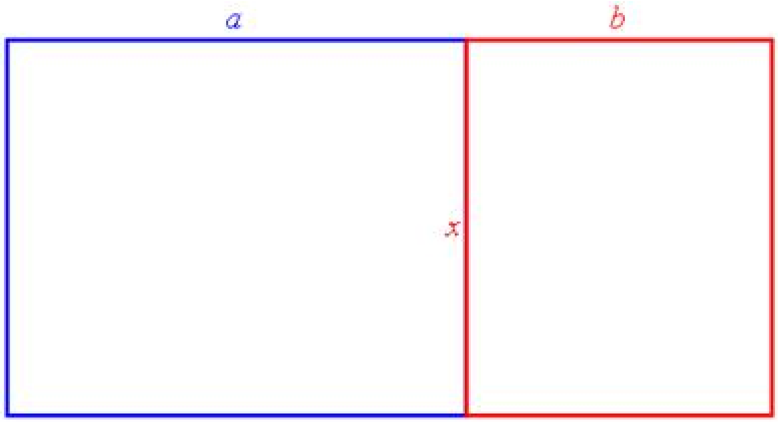
$$a:x = x:b. \tag{1}$$

Tuto úlohu přitom můžeme geometricky interpretovat několika způsoby:

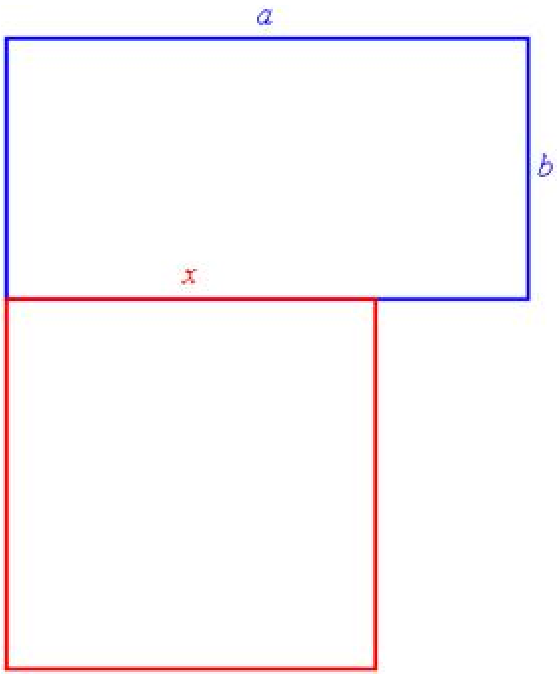
1. Najít délku strany obdélníka, která bude společná dvěma podobným obdélníkům (viz obr. 21).
2. Najít délku strany čtverce, který bude mít stejnou plochu, jako je plocha daného obdélníka (viz obr. 22). Úměru $a:x = x:b$ je totiž možné přepsat do tvaru

$$x^2 = ab\,. \tag{2}$$

Zvládnout tyto úlohy geometricky není obtížné, ale v oboru přirozených čísel to však vždy možné není.



Obr. 21



Obr. 22

VELIČINA x, PRO KTEROU PLATÍ VZTAH (1) RESP. (2), SE NAZÝVÁ GEOMETRICKÝ PRŮMĚR (GEOMETRICKÁ ÚMĚRNÁ) VELIČIN a A b.

Velmi často se také ve starém Řecku hovořilo o „vložení“ čísla (veličiny) mezi dvě daná čísla (mezi dvě dané veličiny).

Tyto úměry velmi úzce souvisejí s Eukleidovými větami; při jejich odvozování (resp. dokazování) se podobné úměry vyskytují.

Kromě geometrického průměru můžeme definovat ještě aritmetický průměr a harmonický průměr.

VELIČINA x, PRO KTEROU PLATÍ

$$a - x = x - b, \tag{3}$$

SE NAZÝVÁ ARITMETICKÝ PRŮMĚR VELIČIN a A b A JE MOŽNÉ JEJ PSÁT TÉŽ VE TVARU

$$x = \frac{a+b}{2}. \tag{4}$$

Harmonický průměr je pak definován takto:

VELIČINA x, PRO KTEROU PLATÍ

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{b}, \tag{5}$$

SE NAZÝVÁ HARMONICKÝ PRŮMĚR VELIČIN a A b A JE MOŽNÉ JEJ PSÁT TÉŽ VE TVARU

$$x=\frac{2ab}{a+b}. \tag{6}$$

Označíme-li aritmetický průměr veličin *a* a *b*, pro které platí $a<b$, symbolem x_{A}, geometrický průměr stejných veličin symbolem x_{G} a harmonický průměr těchto veličin symbolem x_{H}, pak platí:

$$(a-x_{\mathrm{A}}):(x_{\mathrm{A}}-b)=a:a, \tag{7}$$

$$(a-x_{\mathrm{G}}):(x_{\mathrm{G}}-b)=a:x_{\mathrm{G}} \tag{8}$$

a

$$(a-x_{\mathrm{H}}):(x_{\mathrm{H}}-b)=a:b. \tag{9}$$