

## Zlatý řez a pětiúhelník

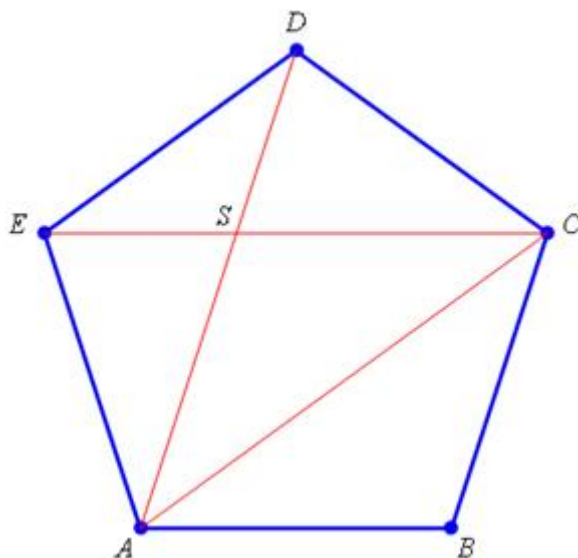
[Poměr zlatého řezu](#) se vyskytuje také v souvislosti s pravidelným pětiúhelníkem. Zájem řeckých matematiků o zlatý řez velmi pravděpodobně souvisel s tím, že pravidelný pětiúhelník byl pro [Pythagorejce](#) posvátným symbolem. Sestrojení pravidelného trojúhelníka, čtyřúhelníka, šestiúhelníka bylo velmi snadné; sestavit pravidelný pětiúhelník se ale nedařilo. Pravidelný pětiúhelník se podařilo sestavit až po objevení zlatého řezu.

Nejdříve se podíváme, jak souvisí zlatý řez s pravidelným pětiúhelníkem. Uvažujme pravidelný pětiúhelník  $ABCDE$ , ve kterém sestrojíme tři jeho úhlopříčky (viz obr. 29). Úhlopříčky  $AD$  a  $CE$  se přitom protínají v bodě  $S$ . Trojúhelník  $ABC$  je rovnoramenný (strany  $AB$  a  $BC$  trojúhelníka jsou také strany pravidelného pětiúhelníka) a tedy těžnice na jeho základnu  $AC$  je zároveň výškou na tuto stranu. Trojúhelník  $ASC$  je s trojúhelníkem  $ABC$  shodný, proto rovnoběžník  $ABCS$  je kosočtverec.

Vzhledem ke shodnosti obou trojúhelníků, které jej tvoří, má rovnoběžník  $ABSC$  všechny čtyři strany stejně dlouhé. Navíc výšky na základy trojúhelníků  $ABC$  a  $ASC$  leží na téže přímce, která navíc půlí stranu  $AC$  (výška na základnu je v rovnoramenném trojúhelníku současně těžnicí). Proto je rovnoběžník  $ABSC$  kosočtverec

Trojúhelníky  $ABC$  a  $ESD$  jsou podobné, a proto platí:  $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|ED|}{|ES|}$ . Úhlopříčky  $AC$  a  $EC$  jsou navzájem stejně dlouhé a úsečky  $AB$ ,  $CS$  a  $ED$  jsou navzájem také stejně dlouhé. Proto můžeme poměr  $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|ED|}{|ES|}$  psát ve tvaru  $\frac{|EC|}{|CS|} = \frac{|CS|}{|ES|}$ . Tento poměr je shodný s poměrem určující [definici zlatého řezu](#). Proto bod  $S$  dělí úhlopříčku  $EC$  v poměru zlatého řezu, tj. platí

$$\frac{|EC|}{|CS|} = \varphi. \quad (24)$$



Obr. 30

Nyní již byla konstrukce pravidelného pětiúhelníka snadná:

1. Sestrojíme úsečku  $EC$ .
2. Pomocí [konstrukce zlatého řezu](#) najdeme bod  $S$ .
3. Z bodu  $C$  opíšeme kružnici  $k$  o poloměru rovném délce úsečky  $EC$ .
4. Z bodu  $E$  opíšeme kružnici  $l$  o poloměru rovném délce úsečky  $CS$  (tj. rovné délce strany pravidelného pětiúhelníka).

5. Na průsečíku [kružnic](#)  $k$  a  $l$  leží vrchol  $A$  hledaného pětiúhelníka.
6. Z bodů  $A$  a  $C$  sestrojíme kružnice o poloměru rovném délce úsečky  $CS$  a na jejich průsečíku získáme vrchol  $B$  pětiúhelníka.
7. Z bodů  $E$  a  $C$  sestrojíme kružnice o poloměru rovném délce úsečky  $CS$  a na jejich průsečíku získáme vrchol  $D$  pětiúhelníka.

Zakreslíme-li do pravidelného pětiúhelníka dvě sousední úhlopříčky, získáme tři rovnoramenné trojúhelníky (viz obr. 30). Vnitřní úhly u základny rovnoramenného trojúhelníka jsou shodné, a proto mají vnitřní úhly trojúhelníka  $ABD$  hodnoty  $72^\circ$ ,  $72^\circ$  a  $36^\circ$ .

Tyto hodnoty můžeme získat, pokud si uvědomíme, že jeden vnitřní úhel pravidelného pětiúhelníka je  $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$ . Úhel  $72^\circ$  je pak vedlejší úhel k úhlu  $108^\circ$ .

Při odvozování dělicího poměru úhlopříčky pravidelného pětiúhelníka jsme zjistili tyto vlastnosti:

1. délka strany pravidelného pětiúhelníka  $AB$  je stejná jako délka delší části  $CS$  úhlopříčky  $EC$ ;
2. úhlopříčka pravidelného pětiúhelníka je další jeho úhlopříčkou rozdělena v poměru zlatého řezu, tj. platí vztah (24).

Proto nyní můžeme psát

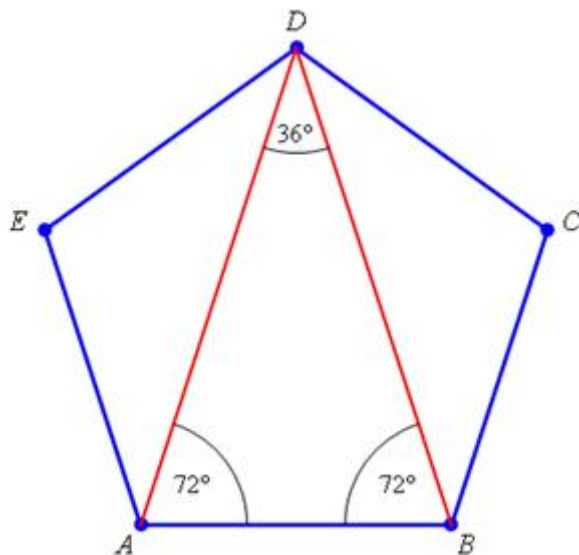
$$\frac{|AD|}{|AB|} = \varphi, \quad (25)$$

tj. délka strany pravidelného pětiúhelníka dělí jeho úhlopříčku v poměru zlatého řezu.

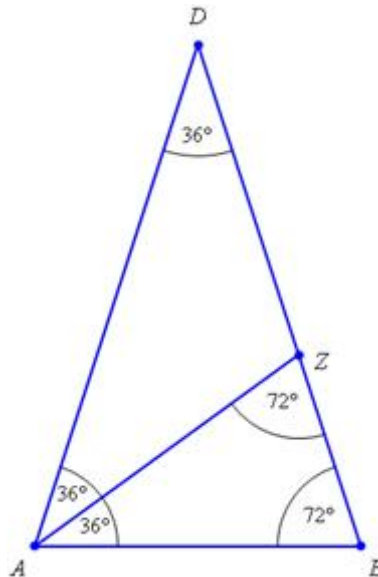
Strana  $AD$  trojúhelníka  $ABD$  leží na úhlopříčce pravidelného pětiúhelníka a strana  $AB$  uvažovaného trojúhelníka tvoří stranu pravidelného pětiúhelníka.

Trojúhelník, ve kterém platí vztah (25), se nazývá **zlatý trojúhelník**.

**ROVNORAMENNÝ TROJÚHELNÍK S POMĚREM DÉLKY RAMENA K DÉLCE ZÁKLADNY V HODNOTĚ ZLATÉHO ŘEZU SE NAZÝVÁ ZLATÝ TROJÚHELNÍK.**



Obr. 31

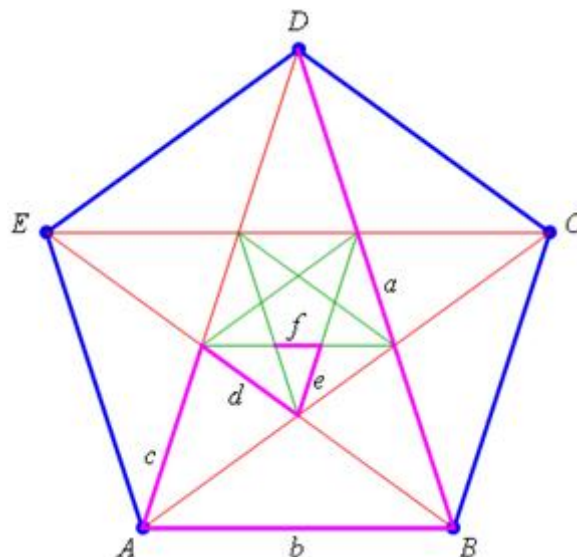


Obr. 32

Rozpůlíme-li úhel při vrcholu  $A$  v trojúhelníku  $ABD$  (zobrazeném na obr. 30), získáme na průsečíku právě sestrojeného ramene úhlu a úsečky  $BD$  bod  $Z$  (viz obr. 31). Trojúhelníky  $ABD$  a  $BZA$  jsou podobné a navíc platí poměr  $\frac{|BD|}{|ZA|} = \frac{|AB|}{|BZ|}$ . Vzhledem k tomu, že délky úseček  $AB$ ,  $ZA$  a  $DZ$  jsou navzájem shodné, můžeme uvedený poměr psát ve tvaru  $\frac{|BD|}{|DZ|} = \frac{|DZ|}{|BZ|}$ , který odpovídá definici zlatého řezu. Bod  $Z$  tedy dělí úsečku  $BD$  v poměru zlatého řezu, tj. platí  $\frac{|BD|}{|DZ|} = \varphi$ .

S využitím právě uvedených vlastností pravidelného pětiúhelníka můžeme nyní upozornit na další vlastnosti. Spojením všech vrcholů úhlopříčkami získáme pentagram (viz obr. 32), který sehrál v dějinách lidstva a zejména v dějinách náboženství důležitou úlohu. Tyto úhlopříčky navíc vytvoří další pětiúhelník a jeho úhlopříčky opět pentagram. Tímto způsobem bychom mohli pokračovat stále dále. Nápadnou vlastností, která vyplývá z výše uvedeného, je poměr úseček  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  a  $f$ . Pro tyto úsečky totiž platí poměr

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f} = \varphi. \quad (26)$$



Na základě platnosti poměru (26) a na základě skutečnosti, že uvedený postup vytváření stále menších pravidelných pětiúhelníků a pentagramů lze opakovat do nekonečna, lze také dokázat nesouměřitelnost úseček o délce  $a$  a  $b$ . Jinými slovy: délka úhlopříčky pravidelného pětiúhelníka a délka jeho strany jsou navzájem nesouměřitelné, tj. jejich poměr není vyjádřit poměrem dvou přirozených čísel; jejich poměr je roven zlatému řezu, což je iracionální číslo.

---

© **Encyklopedie Fyziky** (<http://fyzika.jreichl.com>); **Jaroslav Reichl, Martin Všeticka**

Licence <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> zakazuje úpravy a komerční distribuci.