Fibonacciho posloupnost - zavedení

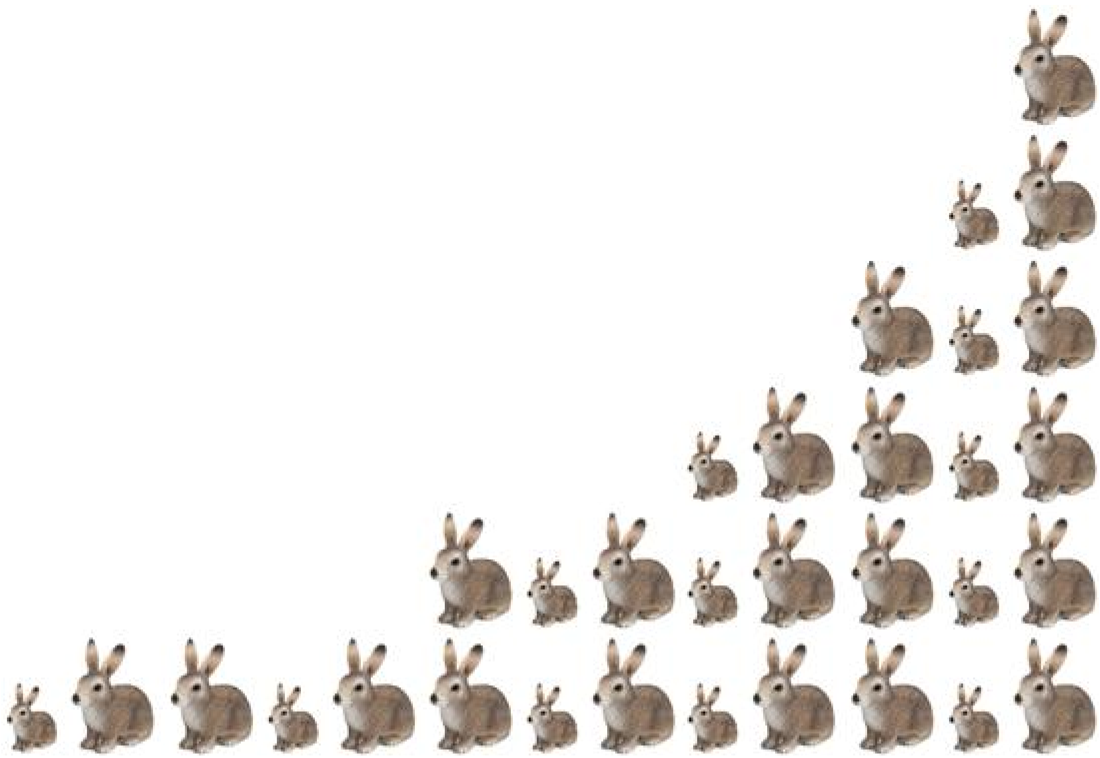
V knize *Liber abaci*, kterou vydal Fibonacci v roce 1202 se objevuje i úloha definující tzv. Fibonacciho posloupnost. Úloha zní:

Kdosi umístil pár králíků na místě ze všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se narodí v průběhu jednoho roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede měsíčně na svět jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku. S případy uhynutí se nepočítá. První králíci umístění do ohrady jsou čerstvě narození.

Budeme postupně počítat páry králíků na daném místě na konci každého měsíce:

1. konec prvního měsíce: 1 původní pár;
2. konce druhého měsíce: 2 páry (původní pár porodil další pár);
3. konec třetího měsíce: 3 páry (původní pár porodil další pár králíků, ale mladí ještě rodit nezačali);
4. konec čtvrtého měsíce: 5 párů (původní pár porodil další pár a mladí králíci narození ve druhém měsíci porodili svůj první pár);
5. …

Situace je zobrazena na obr. 93, na kterém velký králík symbolizuje dospělý pár a malý králík představuje mladý (ještě neplodný) pár.



Obr. 93

Další počítání by bylo ale komplikované. Proto se pokusíme najít nějakou obecnou zákonitost popisující počty králíků v jednotlivých měsících.

Označíme-li si počet párů králíků na konci (n+1)-ního měsíce F_{n+1}, bude na konci (n+2)-hého měsíce v ohradě F_{n+1} starých párů králíků, ale kromě toho se ještě narodí tolik párů králíků, kolik jich bylo na konci n-tého měsíce, tj. F_n. Jinak řečeno: pro počet párů králíků na konci (n+2)-ho měsíce dostaneme vztah:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n . \tag{1}$$

Hledaný počet párů králíků na konci roku není možné vypočítat přímo, ale musíme určit všechny mezikroky, tj. počty párů na konci každého měsíce. Tak postupně dostáváme posloupnost 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377. Na konci roku tedy bude v ohradě 377 párů králíků.

Počty dospělých párů žijících v ohradě na konci jednotlivých měsíců jsou dány posloupností 1, 2, 3, 5, 8, 13, … Počty mladých párů jsou dány toutéž posloupností, jak je možné snadno rozmyslet i s využitím obr. 93.

Posloupnost popsaná rekurentním vztahem (1) se nazývá **Fibonacciho posloupnost** $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ a je to posloupnost

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots, \tag{2}$$

resp. posloupnost

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots \tag{3}$$

Posloupnost popsanou vztahem (1) nazval jako Fibonacciho posloupnost v 19. století francouzský matematik Edouard Lucas (1842 - 1891).

K Fibonacciho posloupnosti dospěl ve svých úvahách i německý fyzik Johannes Kepler (1571 - 1630), aniž by četl Fibonacciho dílo.

Fibonacciho posloupnost je typická ukázka tzv. **rekurentně zadané posloupnosti**, tj. posloupnosti, která není daná vztahem pro výpočet jejího libovolného *n*-tého členu, ale vztahem, ve kterém vystupuje několik členů dané posloupnosti.

Posloupnost daná vztahem pro *n*-tý člen je např. posloupnost $a_n = n^2 + 1$. Chceme-li vypočítat její desátý člen, stačí dosadit za *n* do daného vztahu číslo 10 a okamžitě dostáváme $a_{10} = 10^2 + 1 = 101$. Kdybychom chtěli vypočítat desátý člen Fibonacciho posloupnosti, museli bychom určit všech předchozích devět členů, protože desátý člen určíme jako součet osmého členu a devátého členu. A devátý člen jako součet osmého a sedmého, …

Zápis posloupností pomocí symboliky a_n, kde *a* je název posloupnosti a *n* udává pořadí členu a_n v dané posloupnosti, zavedl v roce 1634 francouzský matematik Albert Girard (1595 - 1632).

Fibonacciho posloupnost je možné také vyjádřit vztahem pro *n*-tý člen výrazem

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right). \tag{4}$$

Je zajímavé, že ačkoliv se v předpisu (4) pro *n*-tý člen Fibonacciho posloupnosti objevují výrazy obsahující iracionální číslo $\sqrt{5}$, jsou hodnoty výrazu (4) pro všechna přirozená čísla *n* přirozená čísla.

Ve vztahu (4) je vlastně už zakódován zlatý řez, se kterým Fibonacciho posloupnost úzce souvisí. První člen vztahu představuje mocninu zlatého řezu a druhý člen můžeme chápat jako jakousi opravu: zlatý řez totiž získáme jako limitu Fibonacciho posloupnosti.

Vztah (4) znal určitě už v 18. století švýcarský matematik Leonhard Euler a francouzský matematik Abraham de Moivre. V polovině 19. století tento vztah pak znovuobjevil francouzský matematik Jacques Philippe Marie Binet.