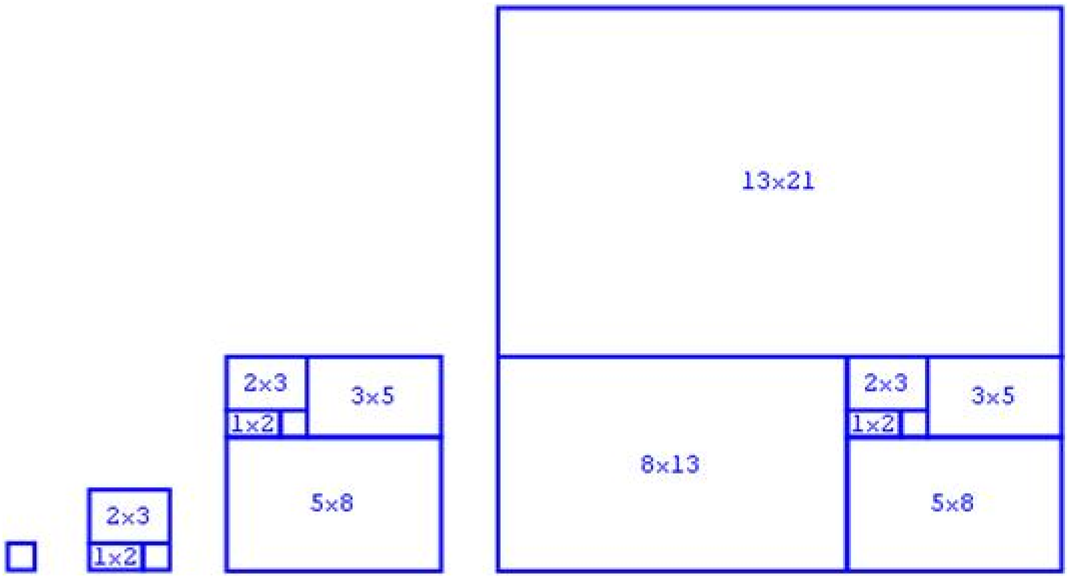
Další vlastnosti Fibonacciho posloupnosti

Pro Fibonacciho posloupnost, jejíž první dva členy jsou 1 a 1, platí vztah

$$F_1 \cdot F_2 + F_2 \cdot F_3 + F_3 \cdot F_4 + \dots + F_{2n-1} \cdot F_{2n} = F_{2n}^2 , \tag{9}$$

který lze znázornit geometricky. Součiny dvou po sobě jdoucích členů Fibonacciho posloupnosti lze chápat jako obsahy obdélníků, jejichž strany mají délky dané právě členy této posloupnosti. Vztah (9) proto můžeme přepsat tak, že lichý počet obdélníků, jehož strany jsou rovny po sobě jdoucím členům Fibonacciho posloupnosti, lze přeskládat do čtverce. Tato skutečnost je zobrazena na obr. 97, na kterém jsou znázorněny tyto čtverce pro případ jednoho obdélníka, tří, pěti a sedmi obdélníků.



Obr. 97

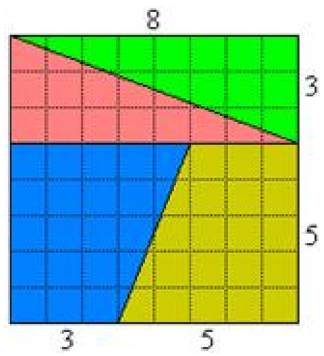
Německý astronom Johannes Kepler objevil další zajímavou vlastnost členů Fibonacciho posloupnosti. Pro všechny členy Fibonacciho posloupnosti platí:

$$\left| F_n \cdot F_{n+2} - F_{n+1}^2 \right| = 1 . \tag{10}$$

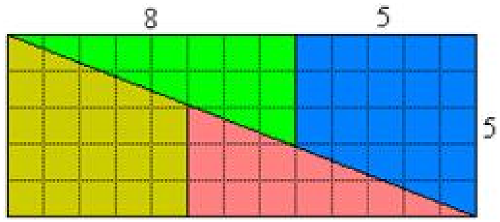
Vztah (10) lze ilustrovat geometricky: obsah čtverce, jehož délka strany je dána daným členem Fibonacciho posloupnosti, se liší právě o jednu jednotku čtvereční od obsahu obdélníka, jehož délky stran jsou dány dvěma členy Fibonacciho posloupnosti bezprostředně sousedícími s členem určujícím délku strany čtverce.

Uvažujme Fibonacciho posloupnost 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Pak jistě platí: $\left|1 \cdot 2 - 1^2\right| = 1$, $\left|1 \cdot 3 - 2^2\right| = 1$, $\left|2 \cdot 5 - 3^2\right| = 1$, $\left|3 \cdot 8 - 5^2\right| = 1$, $\left|5 \cdot 13 - 8^2\right| = 1$, $\left|8 \cdot 21 - 13^2\right| = 1$, ...

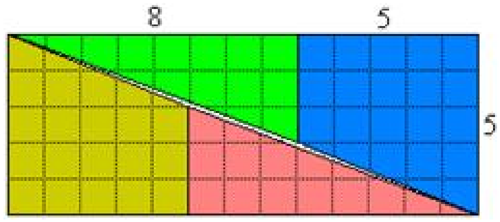
Na základě této vlastnosti členů Fibonacciho posloupnosti vymyslel slavný tvůrce matematických rébusů Sam Loyd (1841 - 1911) záhadný paradox souvisejí s přeskládáním čtverce na obdélník. Při tomto přeskládání jednotlivých dílků, kterými byl tvořen čtverec o straně délky 8 jednotek a tedy s obsahem 64 jednotek čtverečných (viz obr. 98), vznikne obdélník s obsahem 65 jednotek čtverečních (viz obr. 99)! Ve skutečnosti mají přepony pravoúhlých trojúhelníků jiný sklon než jedna ze stran čtyřúhelníků, a proto vznikne v obrazci otvor (viz obr. 100), který má plošný obsah přesně 1 jednotku čtvereční.



Obr. 98



Obr. 99



Obr. 100

Pro členy obou Fibonacciho posloupností (tj. jak pro posloupnost začínající členy 1, 1, 2, ..., tak pro posloupnost začínající členy 1, 2, 3, ...) lze dokázat platnost těchto vztahů:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - F_2\,, \tag{11}$$

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n} - (F_2 - 1)\,, \tag{12}$$

$$F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} = F_{2n+2} - F_{2n} - 1 = F_{2n+1} - (F_2 - 1)\,, \tag{13}$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} - (F_2 - 1)\,. \tag{14}$$

Pro Fibonacciho posloupnost začínající členy 1, 2, 3, ... pak platí vztah

$$F_{n+m} = F_n \cdot F_m + F_{n-1} \cdot F_{m-1}\,. \tag{15}$$

Ze vztahu (15) pak plynou dva speciální vztahy. Pro *m* = *n* dostáváme

$$F_{2n} = F_n^2 + F_{n-1}^2 \tag{16}$$

a pro *m* = *n* + 1 pak máme $F_{2n+1} = F_n \cdot F_{n+1} + F_{n-1} \cdot F_n = F_n \cdot (F_{n+1} + F_{n-1}) = (F_{n+1} - F_{n-1}) \cdot (F_{n+1} + F_{n-1})$, takže dostáváme

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2\,. \tag{17}$$

Vztah (15) lze přitom odvodit na základě poměrně jednoduché úlohy o chození do schodů. Začněme s jednodušší variantou úlohy:

Kolika způsoby lze vyjít schodiště o n schodech, bereme-li schody nejvýše po dvou (tj. vynecháme-li nejvýše 1 schod)?

Počet způsobů vyjití *n* schodů označíme $p(n)$. Všechny možné způsoby vyjití schodů rozdělíme do dvou disjunktních skupin. V první budou všechny ty způsoby vyjití schodů, při nichž šlápneme na první schod - jejich počet bude $p(n-1)$. Šlápneme-li na první schod, máme před sebou už jen $n-1$ schodů.. Ve druhé skupině budou všechny způsoby vyjití schodů, při nichž nešlápneme na první schod; těchto způsobů bude $p(n-2)$. Celkem tedy dostáváme: $p(n) = p(n-1) + p(n-2)$, což je rekurentní vyjádření Fibonacciho posloupnosti analogické se vztahem (1).

Počet způsobů, kolika lze vyjít *n* schodů podle uvedených pravidel, je tedy roven F_n.

Druhá úloha je velmi podobná:

Kolika způsoby lze vyjít schodiště o $n+m$ schodech, bereme-li schody nejvýše po dvou (tj. vynecháme-li nejvýše 1 schod)?

Na základě předchozí úlohy je možné počet způsobů vyjití všech schodů označit symbolem F_{n+m}.

Všechny možné způsoby vyjití schodů rozdělíme do dvou disjunktních skupin. V první budou všechny způsoby vyjití schodů, při nichž šlápneme na n-tý schod: jejich počet bude $F_n \cdot F_m$.

Libovolný způsob vyjití prvních n schodů totiž můžeme kombinovat s libovolným způsobem vyjití zbývajících m schodů. A počet způsobů vyjití schodů je přitom dán členem Fibonacciho posloupnosti, který je na tolikátém místě posloupnosti, kolik schodů má dané schodiště.

První část schodiště má n chodů, druhá jich má m - obě tyto části nezávisle můžeme vyjít $F_n \cdot F_m$ způsoby.

Ve druhé skupině budou všechny způsoby vyjití schodů, při nichž nešlápneme na n-tý schod: těchto způsobů bude $F_{n-1} \cdot F_{m-1}$.

Opět můžeme navzájem kombinovat počet všech způsobů vyjití daného počtu schodů. Nešlápneme-li na n-tý schod, má první část schodiště $n-1$ schodů. Druhá část jich pak má $m-1$.

Celkem tedy dostáváme počet všech způsobů vyjití schodů: $F_{n+m} = F_n \cdot F_m + F_{n-1} \cdot F_{m-1}$.

Fibonacciho posloupnost souvisí také s Pascalovým trojúhelníkem (viz obr. 101). Pomocí úvah o takových k-členných kombinacích n-prvkové množiny, v nichž nejsou vedle sebe sousední prvky, lze odvodit vztah

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}, \tag{18}$$

který platí pro n sudé a vztah

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots + \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}}, \tag{19}$$

který platí pro n liché.

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
\binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \dots \quad \dots \quad \dots \binom{n}{n-2} \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}
\end{array}$$

Obr. 101

Pomocí členů Fibonacciho posloupnosti lze určit i Ludolfovo číslo π. Platí totiž vztah

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arccotg} F_{2k-1} = \frac{\pi}{4}\,. \tag{20}$$