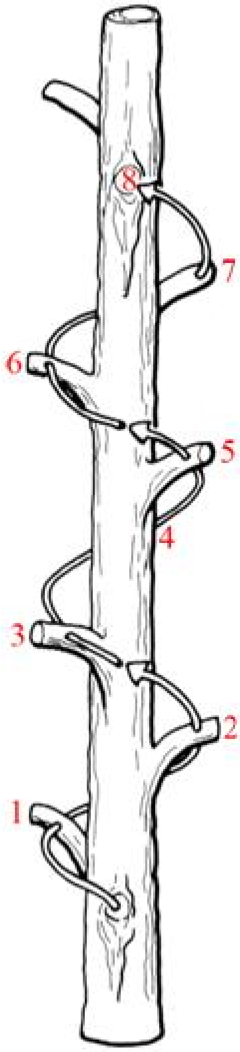
Fibonacciho posloupnost v přírodě

Listy na stonku rostliny nebo větvičky rostou tak, aby byly co nejvýhodněji natočeny pro dopad slunečních paprsků, dešťových kapek a přístupu vzduchu. Vertikální stonek vytváří při svém růstu listy ve zcela pravidelném uspořádání. Listy ale nerostou přímo nad sebou, protože tím by horní listy bránily v dopadu slunečních paprsků a kapek deště na listy spodní. Proto jsou listy na stonku nebo na větvičce rozloženy ve šroubovitém výstupu (viz obr. 102).

Tento jev se nazývá fylotaxe (z řeckého sousloví *uspořádání listů*), což je termín, který zavedl v roce 1754 švýcarský přírodovědec Charles Bonnet.



Obr. 102

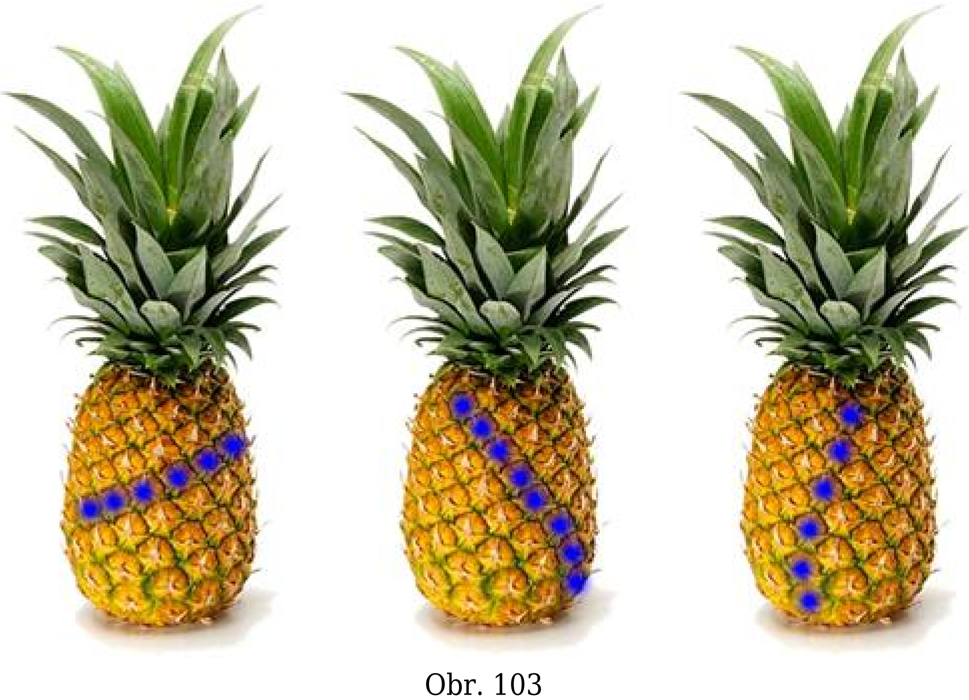
Listy lípy se vyskytují většinou na dvou protilehlých stranách, což odpovídá jednomu listu na polovinu otočky kolem větvičky a označuje se jako $\frac{1}{2}$ fylotaktického poměru. Listy ostružiny nebo listy buku jsou rozmístěny kolem stonku symetricky vždy po třetině otočky, tj. $\frac{1}{3}$ fylotaktického poměru. Jabloně, pobřežní duby a meruňka mají listy umístěné po každých $\frac{2}{5}$ jedné otočky spirály, zatímco hrušně a smuteční vrby je mají každé $\frac{3}{8}$ otáčky. Na obr. 102 je zobrazen případ, kdy na každé tři dokončené obrátky připadá osm větviček, tj. fylotaktický poměr je $\frac{3}{8}$. Již teď je zřejmé, že uvedené poměry jsou dány podílem $\frac{F_n}{F_{n+2}}$ dvou členů Fibonacciho posloupnosti.

Fakt, že se listy rostlin řídí tímto schématem, zpozoroval již ve starověku Theofrastos (373 - 288 př. n. l.) a popisuje jej ve svém spise *De causis planatarum* (*O rostlinách*). K podobnému závěru dospěl i Plinius Starší (24 - 79 n. l.) ve svém díle *Historie přírody* (*Naturális historia*). Výzkum fylotaxe pokročil až v 15. století, kdy Leonardo da Vinci (1452 - 1519) rozpoznal v uspořádání listů jejich seřazení podle spirály v cyklech po pěti, což odpovídá úhlu $\frac{2}{5}$ jedné otáčky. Intuitivně objevil vztah mezi Fibonacciho posloupností a uspořádáním listů německý astronom Johannes Kepler.

Zásadní výzkum fylotaxe zahájil až švýcarský přírodovědec **CHARLES BONNET** (1720 - 1793). Ve své knize *Výzkum využívání listů rostlinami* detailně vysvětluje dvoupětinovou fylotaxi. Ve spolupráci se švýcarským matematikem **JEANEM LOUISEM CALANDRINIM** (1703 - 1758) také objevil, že se u některých rostlin (šupiny jedlových šišek, ananas, ...) objevují série druhotných spirál nazývajících se parastichy.

Historie matematické fylotaxe začíná až v 19. století pracemi botanika **KARLA FRIEDRICHA SCHIMPERA**, jeho přítele **ALEXANDRA BRAUNA**, francouzského krystalografa **AUGUSTA BRAVAISE** (1811 - 1863) a jeho bratra, botanika Louise. Ti nalezli obecné pravidlo, pro vyjadřování fylotaktických poměrů pomocí členů Fibonacciho posloupnosti. Navíc si všimli výskytu těchto čísel u parastichů borových šišek a ananasu.

Krásnou ukázkou fylotaxe založenou na členech Fibonacciho posloupnosti je kůra ananasu. Každý šestiúhelníkový dílek povrchu kůry patří do tří různých spirál (viz obr. 103). Počty jednotlivých typů spirál jsou přitom vyjádřeny členy Fibonacciho posloupnosti. Většina ananasů má na svém povrchu 5, 8, 13 a 21 spirál.



Obr. 103

Bratři Bravaisové ve své práci z roku 1837 mimo jiné objevili, že nové listy vyrůstají zhruba ve stejném úhlu kolem středu stonku rostliny a že tento úhel se většinou blíží hodnotě $137{,}5°$.

Vzhledem k tomu, že platí $222{,}5° \doteq \frac{360°}{\varphi}$, je rozumnější udávat úhel otočení jednotlivých listů vůči sobě v opačném směru a udávat jejich natočení pomocí menšího úhlu. Proto se udává úhel otočení listů vůči sobě s hodnotou $137{,}5°$.

Úhel $137{,}5°$ můžeme přitom vypočítat takto:

$$137{,}5° \doteq 360° - \frac{360°}{\varphi}, \qquad (21)$$

kde φ představuje zlatý řez. Vztah (21) můžeme psát též v ekvivalentním tvaru

$$137{,}5° \doteq \frac{360°}{\varphi^2}. \qquad (22)$$

Ekvivalenci vztahů (21) a (22) můžeme dokázat s využitím číselných vlastností zlatého řezu. Pravou stranu vztahu (21) můžeme rozepsat do tvaru: $360° - \frac{360°}{\varphi} = 360°\left(1 - \frac{1}{\varphi}\right) = 360°(1 - \varphi + 1) = 360°(2 - \varphi)$. Pravou stranu vztahu (22) můžeme postupně psát ve tvaru: $\frac{360°}{\varphi^2} = 360°\left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 = 360°(\varphi - 1)^2 = 360°\left(\varphi^2 - 2\varphi + 1\right) = 360°(\varphi + 1 - 2\varphi + 1) = 360°(2 - \varphi)$. Tím je dokázáno, že vztahy (21) a (22) jsou skutečně identické.

Úhel natočení listů na stonku rostliny tak souvisí se zlatým řez. Ten souvisí s Fibonacciho posloupností, a proto souvisí i úhel natočení listů na stonku rostliny s touto slavnou posloupností.

Holandský matematik Gerrit van Iterson dokázal ve svém díle z roku 1907, že když těsně seskupíme po sobě jdoucí body, které se na hustě vinuté spirále vydělují v úhlech $137{,}5°$, spatříme jednu skupinu spirál směřujících ve směru chodu hodinových ručiček a druhou skupinu spirál stáčejících se opačným směrem. Počty spirál obou těchto skupin jsou učeny dvojicí po sobě jdoucích členů Fibonacciho posloupnosti. Jejich poměr se pak blíží zlatému řezu. Tyto spirály jsou vidět také na uspořádání semínek slunečnice (viz obr. 104). Semínka rostou tak, aby co nejúčinněji využila rovinu květu. Počty spirál závisejí na velikosti květu, ale většinou lze na květu najít 34 spirál stáčejících se jedním směrem a 55 spirál stáčejících se opačně.

Obr. 104

Členy Fibonacciho posloupnosti určují také počty okvětních plátků sedmikrásek, počet plátků květů růže, ... Plátky květů růže jsou vůči sobě posunuté o úhly, jehož hodnoty souvisejí se zlatým řezem.

Proč příroda preferuje při uspořádání listů na stoncích úhel $137{,}5°$ vyplývá z dynamického vývoje. Rozmístění pupenů (listů nebo větviček) podél spirály s úhlem otočení $137{,}5°$ je nejefektivnější, jaké může být. Úhel $137{,}5°$ totiž není racionálním násobkem $360°$. Kdyby se pupeny stáčely v úhlu, který je racionálním násobkem $360°$ (tj. např. $90°$, $120°$, ...), pak by se vyrostlé listy řadily paprskovitě do určitých linií (čtyř pro $90°$, tří pro $120°$, ...) a bylo by mezi nimi spousta volného místa. V případě úhlu $137{,}5°$ se pupeny (a následně ani listy) neseskupí podél žádného specifického paprskovitého směru, takže celý prostor vyplní efektivně. Tím, že je úhel $137{,}5°$ dán násobkem zlatého řezu a že je navíc zlatý řez ze všech iracionálních čísel nejvíce vzdálen racionálnímu číslu, dosahuje toto uspořádání listů nejefektivnějšího postavení.

Toto tvrzení pak potvrdily i fyzikální experimenty Leonida S. Levitova (z roku 1991) a Stephane Douadyho a Yvese Coudera (z let 1992 a 1996). V jednom experimentu umístili Douady a Couder misku silikonového oleje do magnetického pole, které bylo silnější u krajů misky, než v jejím středu. Do středu misky pak vypouštěli kapky magnetické kapaliny, která se chovala jako drobné tyčové magnety. Tyto magnety se navzájem odpuzovaly a vnější magnetické pole je vytlačovalo paprskovitě k okrajům. Oba experimentátoři nalezli pravidelné pohyby, které oscilací konvergovaly ke spirále, na níž se v úhlu $137{,}5°$ oddělovaly jednotlivé po sobě jdoucí kapky magnetické kapaliny. Fyzikální systémy se většinou stabilizují ve stavech, ve kterých mají minimum energie. To by pak vysvětlovalo, proč jsou pupeny na stoncích rostlin vzájemně otočené právě o $137{,}5°$: tato konfigurace je stavem s minimální energií.

A stavy s minimální energií příroda preferuje, protože na rozdíl od lidí příroda energií nehýří.
