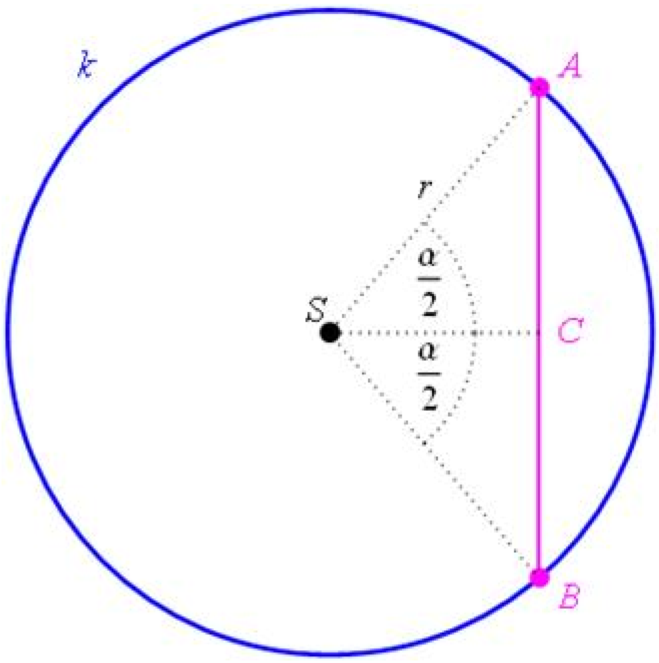
Řecké tětivy a Klaudios Ptolemaios

Nejranější doklady o používání goniometrických funkcí patří do starověkého Řecka. Řecká matematika místo goniometrických funkcí používaných v současnosti pracovala s délkou tětivy kružnice. Tětiva *AB* kružnice *k* o poloměru *r* je dána středovým úhlem α a její délka se značila $\mathrm{crd}\,\alpha$. Podle obr. 131 je zřejmé, že současně používaná funkce sinus je vlastně polovina délky tětivy příslušející dvojnásobnému úhlu vydělená poloměrem *r*. Platí tedy vztah

$$\mathrm{crd}\,\alpha = 2r \sin\frac{\alpha}{2}\,. \qquad (2)$$



Obr. 131

Délky tětiv byly podstatné pro astronomii. Jako první sestavil jejich tabulky významný řecký astronom Hipparchos. Jeho dílo se ovšem dochovalo pouze částečně; o jeho přínosu rozvoji počítání s délkami tětiv svědčí zejména svědectví později žijících autorů.

Na Hipparchovo dílo vědomě navázal zejména Klaudios Ptolemaios, který ve svém díle Hipparcha několikrát zmiňuje. Na základě Ptolemaiova díla je možné usuzovat, že Hipparchos hodnoty délek tětiv dané vztahem (2) opravdu znal a používal je při studiu pohybu Měsíce kolem Země.

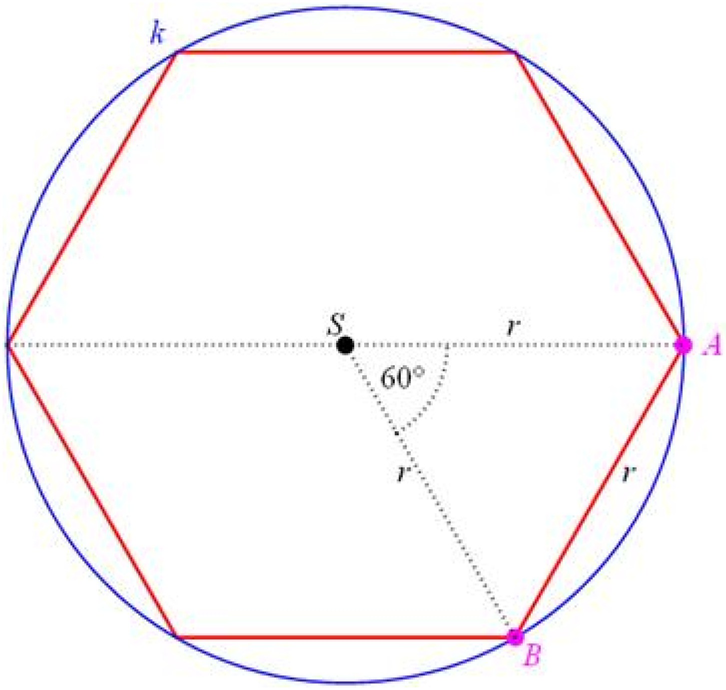
Myšlenka zavedení délek tětiv pochází pravděpodobně přímo od Hipparcha. Délky tětiv byly později nahrazeny polovičními délkami, což odpovídalo současně používané funkci sinus. Poprvé je to zdokumentováno u indického matematika Árjabhaty.

Ptolemaios vypracoval tabulky délek tětiv, které jsou uvedeny v jeho slavném díle *Almagest*. Jedná se o nejstarší dochované tabulky tohoto typu. V e svém díle je pak používá k řadě astronomických výpočtů. Ptolemaios neuvádí pouze výsledky, ale také návod na jejich sestavení.

Základy goniometrie publikoval Ptolemaios v první knize svého stěžejního díla *Almagest*. Pracuje zde s délkami tětiv, ze kterých později vznikly goniometrické funkce tak, jak je známe v současnosti. Při svých výpočtech Ptolemaios používá dělení kružnice na 360 stupňů, které používali staří Babyloňané, a výpočty provádí v šedesátkové číselné soustavě. Průměr kružnice dělí na 120 stejně dlouhých částí, a proto tedy uvažuje kružnici o poloměru 60 jednotek. Vzhledem k tomu, že délka strany *AB* pravidelného šestiúhelníka je stejná, jako je poloměr kružnice *r* tomuto šestiúhelníku opsané (viz obr. 132), můžeme psát základní poznatek, ze kterého Ptolemaios dále vychází, ve tvaru

$$\operatorname{crd} 60° = 60\,. \tag{3}$$

Délka tětivy odpovídající středovému úhlu $60°$ je 60 jednotek. Délka tětivy je v tomto případě stejná jako je poloměr kružnice opsané šestiúhelníku. A tato kružnice má (dle Ptolemaiova značení) průměr 120 jednotek; její poloměr je tedy 60 jednotek.



Obr. 132

Na základě těchto předpokladů pak odvozuje několik vět, které jsou teoretickým základem výpočtu délek tětiv příslušných středovým úhlům s hodnotami od $0°$ do $180°$ s krokem $0{,}5°$. Teorie, ze které postup tvorby tabulek tětiv vychází, je rozdělen do šesti základních kroků. Všechny věty, na kterých jsou výpočty založeny, Ptolemaios pečlivě dokazuje.

1. Nejdříve určí hodnoty $\operatorname{crd} 72°$ a $\operatorname{crd} 36°$ na základě geometrické konstrukce pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku a s využitím Pythagorovy věty.
2. Pomocí Ptolemaiovy věty určující vztah mezi délkami stran a délkami úhlopříček tětivového čtyřúhelníku odvozuje součtový vzorec.
3. Na základě vztahu pro $\operatorname{crd}(\alpha-\beta)$ určuje $\operatorname{crd} 12°$.
4. Pomocí vztahu pro $\operatorname{crd}\frac{\alpha}{2}$ určuje $\operatorname{crd} 6°$, $\operatorname{crd} 3°$, $\operatorname{crd}\frac{3°}{2}$ a $\operatorname{crd}\frac{3°}{4}$.
5. Provede kvalitní odhad pro $\operatorname{crd} 1°$ a pomocí toho určí $\operatorname{crd}\frac{1°}{2}$.
6. S pomocí odvozených vztahů sestavuje tabulky délek tětiv s krokem $0{,}5°$.

Základem hledání odhadu pro $\operatorname{crd} 1°$ je nerovnost platící pro všechny úhly α a β z intervalu $(0°;180°)$ taková, že $\alpha < \beta$:

$$\frac{\operatorname{crd}\alpha}{\operatorname{crd}\beta} > \frac{\alpha}{\beta}; \tag{4}$$

tuto nerovnost používali už Aristarchos, Eukleides a Archimédes. Nerovnost (4) lze psát v ekvivalentním tvaru

$$\frac{\operatorname{crd}\alpha}{\alpha} > \frac{\operatorname{crd}\beta}{\beta}. \tag{5}$$

Matematická úprava nerovnosti (4) je v pořádku, protože jak oba úhly, tak funkce $\operatorname{crd} x$ (tj. délka tětivy kružnice) jsou kladné.

Nerovnost ve tvaru (5) je poměrně názorná: větší oblouk se od příslušné tětivy liší více, než je tomu u menšího oblouku.

Nerovnost (5) pak Ptolemaios aplikoval na již známé hodnoty délek tětiv $\operatorname{crd}\frac{3°}{2}$ a $\operatorname{crd}\frac{3°}{4}$ a získal tak nerovnost $\dfrac{\operatorname{crd}\frac{3°}{2}}{\frac{3°}{2}} < \dfrac{\operatorname{crd} 1°}{1°} < \dfrac{\operatorname{crd}\frac{3°}{4}}{\frac{3°}{4}}$, na základě které určil hodnotu $\operatorname{crd} 1°$. Ptolemaiem určená hodnota byla velmi přesná ve srovnání s dnešní hodnotou.

V Ptolemaiových tabulkách je navíc uveden sloupec, který obsahuje interpolační údaje. Konkrétně je u každého úhlu α uvedena hodnota $\dfrac{\operatorname{crd}(\alpha + 0{,}5°) - \operatorname{crd}\alpha}{30}$. Hodnoty délek tětiv, které jsou v tabulce uvedené bezprostředně po sobě, jsou vyděleny číslem 30. Tyto bezprostředně sousedící tětivy přitom přísluší úhlům, které se liší o $0{,}5°$. Dělení třiceti tedy odpovídá v tomto případě naší jedné úhlové minutě.

Dělení třiceti je v šedesátkové soustavě, v níž Ptolemaios počítal, jednoduché: číslo, které chceme dělit třiceti, vynásobíme dvěma a ve výsledku posuneme desetinnou čárku o jedno místo vlevo.

Tento interpolační údaj umožňuje rozšířit tabulky alespoň přibližnými hodnotami délek tětiv počítanými s krokem jedné úhlové minuty.
