Zpřesňování výpočtů

Astronomické výpočty se prováděly v šedesátkové číselné soustavě, a proto byla také nejčastěji používána varianta sinu, ve které se jako základ uvažovala kružnice o poloměru 60 jednotek. Tuto variantu funkce sinus budeme značit $\mathrm{Sin}\,\alpha$.

V současné době se v matematice používá při zobrazování goniometrických funkcí jednotková kružnice, tj. kružnice s poloměrem 1 jednotka.

Funkce $\mathrm{Sin}\,\alpha$ je tedy definována vztahem

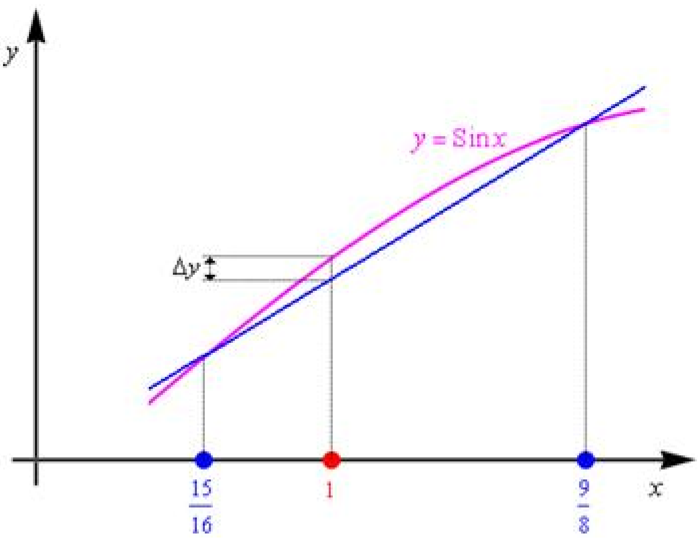
$$\mathrm{Sin}\,\alpha = \frac{\mathrm{crd}\,\alpha}{2} = 60\sin\alpha\,, \qquad (8)$$

kde $\mathrm{crd}\,\alpha$ je délka tětivy kružnice o poloměru 60 jednotek odpovídající středovému úhlu α.

První tabulky sinů, které se od Arabů dochovaly (i když jen v pozdějším přepracování), sestavil ve svém astronomickém díle *Zídž al-Sindhind* arabský matematik **MUHAMMAD IBN MÚSÁ AL-CHWÁRÍZMÍ** (780 - 850). Uvedené dílo obsahovalo šedesátkové tabulky sinů s krokem $1°$ s přesností na 3 šedesátinná místa. Al-Chwárízmí v těchto tabulkách také implicitně používá funkce tangens a kotangens při řešení úloh na zjišťování výšek objektů pomocí gnómonů a stínu.

Astronomové a matematikové se stále snažili zpřesnit nalezené hodnoty goniometrických funkcí. Proto se snažili zlepšit také odhad uvedený v Ptolemaiově postupu. Klíčovým bodem dalších výpočtů je přesnost odhadu délky tětivy odpovídající jednomu stupni, tj. odhad hodnoty $\mathrm{crd}\,1°$ dané vztahem (2).

Nejstarší známé zpřesnění hodnoty $\mathrm{Sin}\,1°$ (a tedy i hodnoty $\mathrm{crd}\,1°$, jak ukazuje vztah (6)) provedl egyptský astronom **IBN JÚNUS** (950 - 1009). Pro nalezení přesnějšího odhadu hodnoty $\mathrm{Sin}\,1°$ využívá znalost hodnot $\mathrm{Sin}\,\frac{9°}{8}$ a $\mathrm{Sin}\,\frac{15°}{16}$, ze kterých pomocí lineární interpolace určuje hodnotu $\mathrm{Sin}\,1°$ (viz obr. 134). Přesnost této interpolace byla 6 desetinných míst (tj. 3 šedesátinná místa). S touto přesností pak také počítal tabulky sinů s krokem 10 úhlových minut.



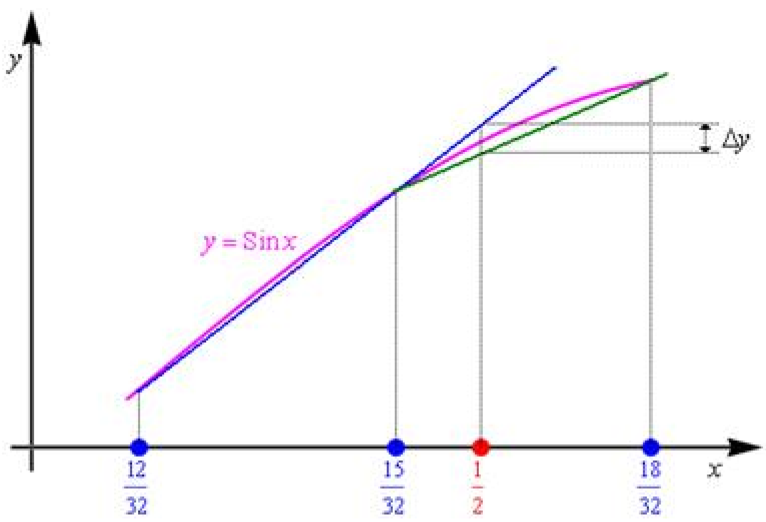
Obr. 134

Funkce zobrazené na obr. 134 jsou zobrazeny tak, aby vynikl rozdíl mezi lineární aproximací a funkcí $y = \mathrm{Sin}\,x$. Kdyby byly obě funkce nakreslené ve správném měřítku, nebyl by rozdíl Δy tak velký, jak je zobrazen na obrázku. Při zobrazení ve správném měřítku totiž obě funkce téměř splývají.

Ještě větší přesnosti než Ibn Júnus dosáhl v určování odhadu hodnoty $\mathrm{Sin}\,1°$ bagdádský astronom **ABÚ'L-WAFÁ' AL-BÚZJÁNÍ** (940 - 998). Jako jeden z prvních matematiků se zabýval podrobně a systematicky goniometrickými vzorci. Ve svém díle *Almagest*, které mělo stejný název jako slavné dílo Klaudia Ptolemaia, používal jak délky tětiv definované vztahem (2) tak funkci sinus. Řada vět, které ve svém díle publikoval, se zabývá právě vztahem mezi délkou tětivy a sinem.

Abú'l-Wafá' navrhl nový a přesnější způsob odhadu hodnoty $\mathrm{Sin}\,\frac{1°}{2}$, čímž mohl výrazně zpřesnit stávající tabulky sinů. Pro výpočet hodnoty $\mathrm{Sin}\,\frac{1°}{2}$ využívá také interpolační metodu, ale vychází z předem vypočtených hodnot $\mathrm{Sin}\,\frac{12°}{32}$, $\mathrm{Sin}\,\frac{15°}{32}$ a $\mathrm{Sin}\,\frac{18°}{32}$. Tyto hodnoty použil proto, že na základě geometrické konstrukce pravidelného pětiúhelníku a pravidelného desetiúhelníku znal hodnoty $\mathrm{Sin}\,72°$ a $\mathrm{Sin}\,36°$ a na základě konstrukce pravidelného šestiúhelníku znal hodnotu $\mathrm{Sin}\,60°$. Dále pak určil $\mathrm{Sin}\,12° = \mathrm{Sin}\,(72° - 60°)$, $\mathrm{Sin}\,15° = \mathrm{Sin}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 60°\right)$ a $\mathrm{Sin}\,18° = \mathrm{Sin}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 72°\right)$. Určovat sinus polovičního argumentu již uměl - proto bylo snadné určit též $\mathrm{Sin}\,\frac{12°}{32}$, protože $\frac{1}{32} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$.

Horní hranici pro $\mathrm{Sin}\,\frac{1°}{2}$ určil Abú'l-Wafá' z lineární aproximace pomocí přímky procházející body $\left[\frac{12°}{32}; \mathrm{Sin}\,\frac{12°}{32}\right]$ a $\left[\frac{15°}{32}; \mathrm{Sin}\,\frac{15°}{32}\right]$. Dolní odhad pak získal na základě lineární aproximace pomocí přímky procházející body $\left[\frac{15°}{32}; \mathrm{Sin}\,\frac{15°}{32}\right]$ a $\left[\frac{18°}{32}; \mathrm{Sin}\,\frac{18°}{32}\right]$ (viz obr. 135).



Obr. 135

Funkce zobrazené na obr. 134 jsou zobrazeny tak, aby vynikl rozdíl mezi oběma lineárními aproximacemi a funkcí $y = \mathrm{Sin}\,x$. Kdyby byly funkce nakreslené ve správném měřítku, nebyl by rozdíl Δy tak velký, jak je zobrazen na obrázku. Při zobrazení ve správném měřítku totiž všechny zde zobrazené funkce téměř splývají.

Takto získaný interval, ve kterém leží hodnota $\mathrm{Sin}\,\frac{1°}{2}$, je přibližně 6krát užší, než je přesnost udávaná Ptolemaiem.

Dalším význačným arabským učencem byl **ABÚ'L-RAJCHÁN AL-BÍRUNÍ** (973 - 1048). Z hlediska rozvoje goniometrie jsou důležitá zejména dvě jeho díla. Astronomický spis *Qánún al-Mas'údí*, v němž uvádí tabulky sinů založené na jednotkové kružnici, a matematický spis *Kniha o odvození tětiv v kružnici*, ve kterém se zabývá goniometrií. Tabulky sinů uvedené v díle *Qánún al-Mas'údí* počítá na základě jednotkové kružnice, což znamená, že jeho sinus naprosto přesně odpovídá současně používané funkci sinus. Použití jednotkové kružnice ale nepřinášelo v té době výrazné výhody, protože všechny astronomické výpočty se prováděly v šedesátkové číselné soustavě. Přechod k jednotkové kružnici byl nevyhnutelný až v době, když se od šedesátkové soustavy začalo přecházet k desítkové soustavě. Jednotková kružnice tak umožnila zjednodušit výpočty: nebylo nutné násobit a dělit šedesáti.

V Evropě se sinus v současné podobě prosadil až zásluhou švýcarského matematika Leonharda Eulera (1707 - 1783).

Originálním způsobem řeší problém aproximace hodnoty $\sin 1°$ arabský matematik **AL-SAMAW'AL IBN JACHJÁ AL-MAGHRIBÍ** (1130 - 1180) ve svém díle *Odhalení chyb astronomů*. V tomto díle kromě jiného poukazuje na skutečnost, že astronomové běžně používají délku tětivy příslušné jednomu stupni, ale nikdo přitom nezná přesně její délku. Problémem podle něj je dělení kružnice na 360 dílů. Proto navrhuje dělení kružnice na 240 dílů nebo 480 dílů. Při rozdělení kružnice na 480 dílů má totiž strana této kružnici vepsaného pětiúhelníka délku 96 dílů a strana pravidelného šestiúhelníka má délku 80 dílů. Odtud se pak snadno určí délka tětivy odpovídající 16 dílům Postupným půlením pak už snadno dostaneme délku tětivy odpovídající jednomu dílu.
