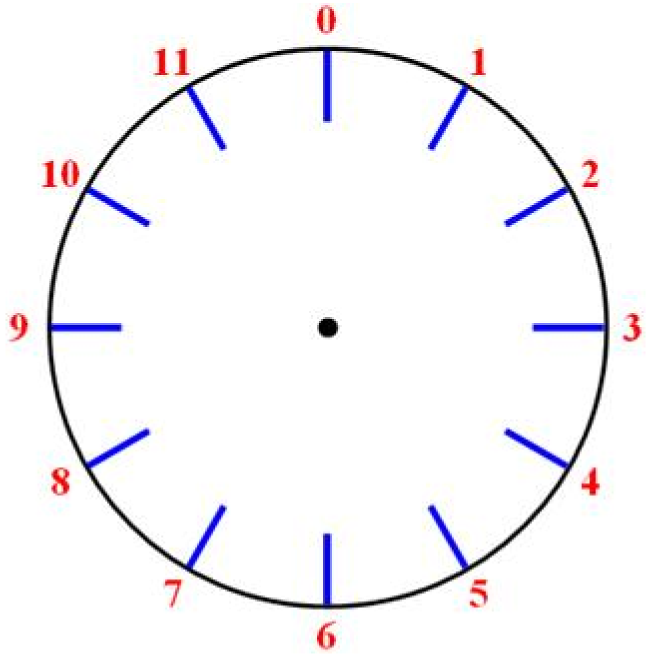
Motivace - počítání na hodinách

Dříve než přistoupíme k operacím, které můžeme se dvěma čísly provádět ve dvojkové soustavě, je dobré si připomenout počítání v jiné než desítkové soustavě, které známe z praxe. Jedná se o počítání ve dvanáctkové soustavě (tj. v soustavě, jejímž základem je číslo 12), které používáme v souvislosti s hodinami. Na ciferníku běžných hodin jsou sice napsaná čísla 1 až 12, ale pro naše účely uvažujme ciferník s údaji 0 až 11 (viz obr. 3).



Obr. 3

Na první pohled je zvláštní, že jsme číslo 12 zaměnili číslem 0, ale pro naše účely je to více než vhodné.

Dvojková soustava, která má za základ číslo 2, používá k vyjádření libovolného čísla pouze znaky 0 a 1, proto i dvanáctková soustava, se kterou se pracuje v souvislosti s počítáním na hodinami, bude používat pouze čísla 0 až 11.

Pokud bychom navíc uvažovali počítání hodin v soustavě se základem 24 (tj. uvažovali bychom 24 hodin), tak v tomto případě se číslo 24 vyskytnout nesmí nejen z důvodů počítání v dané číselné soustavě, ale zejména z důvodu definice času!

Časový údaj 24:10 neexistuje! Neexistuje ani časový údaj 24:00. Po 23:59:59 následuje na všech hodinách údaj 0:00:00!

Při počítání na běžných hodinách (i na těch, jejichž ciferník je zobrazen na obr. 3) platí jistá pravidla, která od dob, kdy jsme s časovými údaji na hodinách začali pracovat, všichni známe a nemuseli jsme vědět, že počítáme ve dvanáctkové soustavě. Nyní budou tato pravidla vhodná k ujasnění si, jak se obecně pracuje v soustavách, které mají jiný základ, než je číslo 10.

Pokud hodiny ukazují 8 hodin ráno a víme, že film, který právě začal, bude trvat 2 hodiny, je jasné, že skončí v 10 hodin. Platí totiž: 8 + 2 = 10.

Pokud hodiny ukazují 8 hodin a víme, že za čtyři hodiny přijde kamarád, je jasné, že kamarád přijde ve 12 hodin, tj. platí 8 + 4 = 12. V našem případě, kdy jsme používání čísla 12 zakázali, bychom ale měli říct, že kamarád přijde v 0 hodin. To bude ještě lépe představitelné, pokud je právě 8 hodin večer - pak je jasné, že za 4 hodiny bude půlnoc a tedy (digitální) hodiny budou ukazovat 0 hodin.

V rámci úvodu před dalšími početními operacemi ve dvojkové soustavě ale musíme být přesnější: je nutné si uvědomit, že po převodu uvedených výpočtů např. do desítkové soustavy musejí zůstat početní pravidla zachována. Tj. v desítkové soustavě musí platit, že 8 + 4 = 12. Aby byl tedy výše uvedený výpočet ve dvanáctkové soustavě správně, je nutné psát 8 + 4 = 10. Ovšem v tomto případě musíme rovnost číst „osm plus čtyři rovná se jedna nula“ a ne „osm plus čtyři rovná deset“.

Symbol „10“ v poslední uvedené rovnici totiž znamená číslo ve dvanáctkové soustavě a má jiný význam, než běžný symbol „10“ vyjadřující desítku.

Správně bychom měli při dodržování všech pravidel psát $(8)_{12}+(4)_{12}=(10)_{12}$ a předchozí uvedený příklad ve tvaru $(8)_{12}+(2)_{12}=(A)_{12}$; pro čísla větší nebo rovna deseti se v soustavách, které mají za základ číslo větší nebo rovné deseti, používají postupně znaky *A*, *B*, *C*, …

Pokud ovšem budeme stále mít na zřeteli, že počítáme hodiny, nebudou snad žádné zmatky a omyly vznikat.

Další situace může nastat pokud v 8 hodin ráno odejdeme do školy nebo do práce a doma ohlásíme, že se vrátíme za 6 hodin. Všichni z praxe víme, že v tomto případě platí: 8 + 6 = 2 (tj. vrátíme se ve dvě hodiny odpoledne). Pokud bychom chtěli být matematicky přesní, tak bychom museli psát: $(8)_{12}+(6)_{12}=(12)_{12}$.

A právě fakt, že při správném matematickém zápisu musíme uvažovat i „jedničku“ před číslem udávajícím počet hodin, je důležitý pro počítání ve dvojkové soustavě. Tato „jednička“ znamená přenos z nižšího řádu. Je to stejný přenos, který běžně uplatňujeme u sčítání čísel pod sebou (nebo odzadu).

Součet 124 + 859 budeme počítat postupně odzadu. Takže začneme součtem 4 + 9 = 13; do výsledku napíšeme číslo 3 a jedničku si pamatujeme (tj. jedničku přenášíme do vyššího řádu - z řádu jednotek do řádu desítek). Pokračujeme v součtu dále: 2 + 5 + 1 = 8 (1 je ta jednička, kterou jsme si pamatovali z minulého výpočtu) - napíšeme tedy číslo 8 a do vyššího řádu nepřenášíme nic. Další součet je 1 + 8 = 9 - takže zapíšeme 9 a získali jsme tedy: 124 + 859 = 983.

V případě využití dvojkové soustavy v digitální technice (např. při popisu činnosti různých hradel) se používá terminologie, že jedničku přenášíme do vyššího bitu.

Dále bude vhodné, pokud si uvědomíme, jakým způsobem je možné na hodinách odčítat dvě čísla.

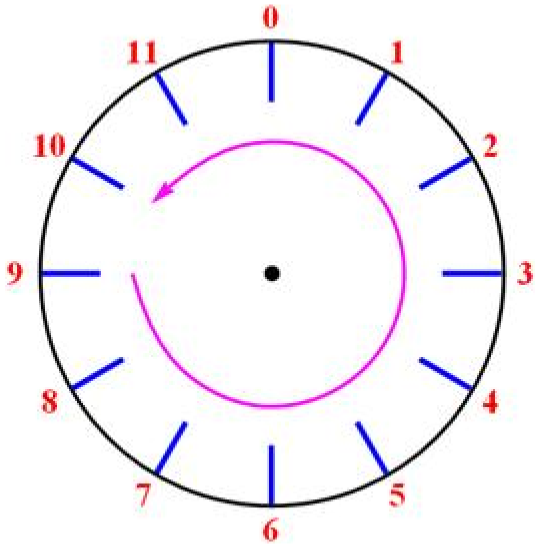
Představme si, že je právě 9 hodin. Pokud víme, že jsme na cestu měli vyrazit před 4 hodinami, snadno spočítáme, že jsme měli vyrazit v 5 hodin. Platí tedy: 9 - 4 = 5.

Pokud je nyní opět 9 hodin ráno a víme, že pro nás důležitá událost se stala před 11 hodinami, snadno na hodinách spočítáme, že se stala v 10 hodin večer. Tedy platí: 9 - 11 = 10 - tento zápis platí pouze při počítání na hodinách! Matematicky je nesprávný!

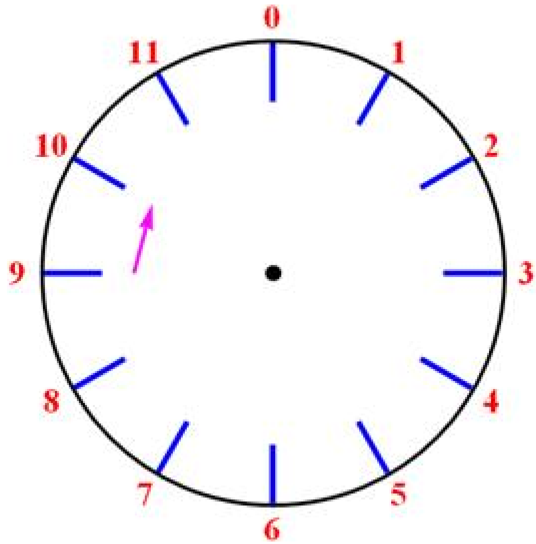
Ke stejnému výsledku ale můžeme dospět také tak, že k 9ti hodinám přičteme jednu hodinu. Tato jedna hodina, kterou přičítáme, je doplněk k 11ti hodinám, které jsme měli původně odečíst, do 12ti hodin na ciferníku hodin. Schématicky je odčítání 11ti hodin (resp. přičítání jedné hodiny) zobrazeno na obr. 4 (resp. obr. 5).

To tedy znamená, že pokud máme na hodinách odečíst *p* hodin od dané hodiny, získáme správný číselný výsledek tak, že k danému počtu hodin přičteme (12 - *p*) hodin.

Velmi podobný postup se používá při počítání ve dvojkové soustavě, kde se při korektním uvažování o rozdílu čísel ve dvojkové soustavě nejdříve musí definovat dvojkový doplněk čísla.



Obr. 4



Obr. 5