

## Cardanovy vzorce

Cardanovy vzorce jsou vzorce pro výpočet kořenů kubické rovnice. V době, kdy [Cardano](#) své výpočty odvozoval, se začínala [matematická symbolika](#) teprve rozvíjet. Z důvodu lepšího pochopení Cardanova postupu bude ovšem výpočet proveden s využitím současné symboliky.

Kubická rovnice s reálnou neznámou  $y$  je rovnice ve tvaru

$$y^3 + A \cdot y^2 + B \cdot y + C = 0, \quad (3)$$

kde  $A, B, C \in \mathbb{R}$ . Skutečnost, že koeficient kubického členu je roven jedné, není na újmu obecnosti. Pokud by zde byl nějaký obecný koeficient, musel by být nenulový (jinak by rovnice (3) nebyla kubická). A nenulovým koeficientem lze celou rovnici vydělit. Proto můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat dále rovnici (3).

V době, kdy se Cardano zabýval [řešením kubických rovnic](#), byly známy celkem tři typy kubických rovnic s **kladnými** koeficienty  $a$  a  $b$  a s **kladnou** neznámou  $x$ :

$$x^3 + a \cdot x = b, \quad (4)$$

$$x^3 = a \cdot x + b \quad (5)$$

a

$$x^3 + b = a \cdot x. \quad (6)$$

Pokud bychom připustili, že  $a, b$  a  $x$  budou obecně reálná čísla, jsou rovnice (4) až (6) navzájem ekvivalentní. Ale na přelomu 15. století a 16. století byla matematika stále ještě pod vlivem [řecké matematiky](#) a částečně pod vlivem [geometrického řešení](#) úloh. Navíc [práci](#) s koeficienty matematici zatím neznali, a proto pracovali výhradně s kladnými čísly. Rovnice (4) až (6) tedy můžeme interpretovat takto: *kladné číslo se rovná jinému kladnému číslu*. Použit v těchto rovnicích znaménko „-“ není možné, protože by nebyl zaručen kladný výsledek.

Jak je vidět, rovnice (4) až (6) neobsahují kvadratický člen. Toto zjednodušení si mohli matematikové dovolit, protože uměli vhodnou substitucí kvadratický člen v kubické rovnici odstranit. Stačí v rovnici (3) použít substituci

$$y = x - \frac{A}{3}. \quad (7)$$

Obecně lze podobnou substitucí v rovnici  $n$ -tého stupně vyloučit  $(n - 1)$ -ní člen. Za neznámou je v tomto případě nutné substituovat výraz  $x - \frac{A_{n-1}}{n}$ .

Dosazením vztahu (7) do rovnice (3) dostaneme:  $\left(x - \frac{A}{3}\right)^3 + A \cdot \left(x - \frac{A}{3}\right)^2 + B \cdot \left(x - \frac{A}{3}\right) + C = 0$ .

Umocněním získáme:  $x^3 - A \cdot x^2 + \frac{A^2}{3}x - \frac{A^3}{27} + A \cdot x^2 - \frac{2}{3}A^2 \cdot x + \frac{A^3}{9} + B \cdot x - \frac{A \cdot B}{3} + C = 0$ . Po úpravě pak máme rovnici:

$$x^3 + \left( B - \frac{A^2}{3} \right) \cdot x + \frac{2A^3}{27} - \frac{A \cdot B}{3} + C = 0. \quad (8)$$

Abychom nemuseli dále pracovat s poměrně komplikovaně zapsanými koeficienty, přepíšeme rovnici (8) do tvaru

$$x^3 + p \cdot x + q = 0, \quad (9)$$

kde

$$p = B - \frac{A^2}{3} \text{ a } q = \frac{2A^3}{27} - \frac{A \cdot B}{3} + C. \quad (10)$$

Nyní budeme rovnici (9) řešit tak, jak jí řešil Cardano. Zavedeme další dvě proměnné  $u$  a  $v$  vztahem

$$x = u + v \quad (11)$$

a dosadíme do rovnice (9). Dostaneme tak rovnici  $(u+v)^3 + p \cdot (u+v) + q = 0$ . Po umocnění a roznásobení získáme rovnici ve tvaru  $u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0$ . Další úpravou získáme rovnici ve tvaru  $u^3 + v^3 + u(3uv + p) + v(3uv + p) + q = 0$  a tedy dostáváme rovnici

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0. \quad (12)$$

Abychom rovnici (12) dále zjednodušili, je nutné nalézt další podmínky. První z podmínek je ta, že položíme

$$3uv + p = 0, \quad (13)$$

protože v rovnici (9) nebyly smíšené členy obsahující součin  $u \cdot v$ . Vztah (13) můžeme psát ve tvaru

$uv = -\frac{p}{3}$  a po umocnění na třetí získáme výraz

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}. \quad (14)$$

Poslední úprava, kterou jsme provedli, se může zdát být umělá nebo nesmyslná - řešení se tím zdánlivě komplikuje. Ale pouze zdánlivě! Cardanův postup je poměrně promyšlený.

Dosazením podmínky (13) do rovnice (12) získáme rovnici

$$u^3 + v^3 + q = 0 \text{ resp. } u^3 + v^3 = -q. \quad (15)$$

Na vztahy (14) a (15) lze nyní nahlížet jako na Viétovy vztahy pro řešení kvadratické rovnice s kořeny  $u^3$  a  $v^3$ . Tato kvadratická rovnice (např. v proměnné  $z$ ) má tedy tvar

$$z^2 + q \cdot z - \frac{p^3}{27} = 0. \quad (16)$$

Nalezení řešení kvadratické rovnice (16) je již snadné. S využitím vztahu pro diskriminant

kvadratické rovnice, můžeme postupně psát:

$$z_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4 \cdot \frac{p^3}{27}}}{2} = \frac{-q \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \text{ Diskriminant ve tvaru}$$

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \quad (17)$$

bude důležitý pro další rozbor počtu řešení řešené rovnice (9).

Na základě Viétoých vztahů (14) a (15) jsou ale kořeny rovnice (16) čísla označená jako  $u^3$  a  $v^3$ . Proto můžeme psát

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ a } v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \quad (18)$$

Uvědomíme-li si, že rovnice (16) je pomocí substituce (11) odvozena z rovnice (9), můžeme pomocí řešení rovnice (16) vyjádřit i řešení rovnice (9). Musíme vzít ale ještě v úvahu substituci (11) a fakt, že rovnice (16) byla sestavena na základě Viétoých vztahů (14) a (15). Pro řešení rovnice (9) tedy můžeme s využitím vztahů (18) psát  $x_{1,2,3} = \sqrt[3]{u^3} + \sqrt[3]{v^3}$  a po dosazení dostáváme

$$x_{1,2,3} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (19)$$

Vztah (19) je matematickou podobou **Cardanova vzorce**. Je nutné si uvědomit, že třetí odmocniny je nutné (co do znaménka) vybrat tak, aby byla splněna podmínka (13). Klíčovou roli zde bude hrát číslo  $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$ , které je nutné vyjádřit pomocí komplexních čísel.

Rovnice třetího stupně totiž musí mít obecně (tj. v komplexních číslech) tři kořeny. A číslo  $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$  je jedno z řešení rovnice

$$\varepsilon^3 - 1 = 0. \quad (20)$$

Je pravda, že tyto poznatky byly v matematice odvozeny až později, nicméně Cardano správně vytušil, že řešení mimo reálná čísla (aniž je tak nazýval) existovat bude. Vyplývá to i z diskuse, která je uvedena dále, počtu reálných kořenů v závislosti na parametrech  $p$  a  $q$  rovnice (9).

Rovnice (20) je tzv. binomická rovnice a ta má v tomto případě tato řešení vyjádřená komplexními čísly:

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ a } \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad (21)$$

kde  $i$  je tzv. imaginární **jednotka**, pro kterou platí  $i^2 = -1$ . Dále budeme pracovat pouze s komplexním číslem  $\varepsilon$ , protože komplexní číslo  $\varepsilon_0$  je rovno jedné a komplexní číslo  $\varepsilon_2$  můžeme vyjádřit pomocí komplexního čísla  $\varepsilon$ . Platí totiž:

$$\varepsilon^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \varepsilon_2.$$

Nyní můžeme kořeny rovnice (9) tedy psát ve tvarech

$$x_1 = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad (22)$$

$$x_2 = \varepsilon \cdot u + \varepsilon^2 \cdot v = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (23)$$

a

$$x_3 = \varepsilon^2 \cdot u + \varepsilon \cdot v = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (24)$$

Ve vztazích (22) až (24) vystupují komplexní čísla, která v Cardanově době nebyla známa. Stejně tak se teprve začínalo (pod vlivem [Fibonacciho](#)) počítat se zápornými čísly. Přesto byl schopen Cardano problém řešení kubické rovnice vyřešit.

Přesto, že jsou vztahy (22) až (24) vyjádřeny pomocí komplexních čísel, mohou při vhodné volbě koeficientů  $p$  a  $q$  vycházet reálná čísla. Stačí si uvědomit, že diskriminant (17) je definován jako součet dvou zlomků, přičemž zlomek  $\frac{p^3}{27}$  může být záporný. Jeho absolutní hodnota může být větší, než je hodnota zlomku  $\frac{q^2}{4}$ , který též vystupuje v diskriminantu (17). Hodnota diskriminantu může být tedy kladná, záporná i nulová. Na tento diskriminant poté aplikujeme druhou odmocninu, jejímž výsledkem může být číslo reálné nebo komplexní. Výsledek pak přičteme (resp. odečteme) k dalšímu členu, a pak aplikujeme třetí odmocninu. Tato třetí odmocnina se počítá obecně z komplexního čísla - a výsledkem je opět komplexní číslo. Výsledek je pak násoben dalším komplexním číslem. A analogicky se vypočítá druhý člen ve vztazích (22) až (24). Proto lze vhodnou volbou koeficientů  $p$  a  $q$  získat různé typy čísel (reálná nebo komplexní) - v závislosti na tom, jak se navzájem odečtou členy obsahující imaginární jednotku  $i$ .

Vhodnou volbou parametrů  $p$  a  $q$  v rovnici (9) získáme jednu z původně vyšetřovaných rovnic (4), (5) nebo (6). Jednotlivé případy bude ilustrovat i graf funkce

$$f: y = x^3 + p \cdot x + q; \quad (25)$$

řešit rovnici (9) totiž znamená hledat průsečíky grafu funkce dané předpisem (25) s osou  $x$  kartézského systému. Mohou tedy nastat tyto případy:

1.  $p > 0$  a  $q < 0$  - tento případ odpovídá rovnici (4) a graf příslušné funkce je zobrazen na obr. 119. V tomto případě má rovnice (9) resp. rovnice (4) jeden reálný kořen a dva kořeny komplexní (komplexní kořeny není možné v uvedeném grafu vyznačit).

Funkce zobrazená na obr. 119 se bude pro různé volby  $p$  a  $q$ , které splňují výše uvedené podmínky, lišit jen posunem po ose  $y$  a [deformací](#) grafu. Tvar (tj. skutečnost, že graf protne osu  $x$  pouze jednou) zůstane přitom stále stejný.

Shodné vlastnosti by měl graf funkce dané předpisem (25) i pro případ  $p = 0$ . Tento případ ale nebyl v době, kdy Cardano vzorce publikoval, brán v úvahu.

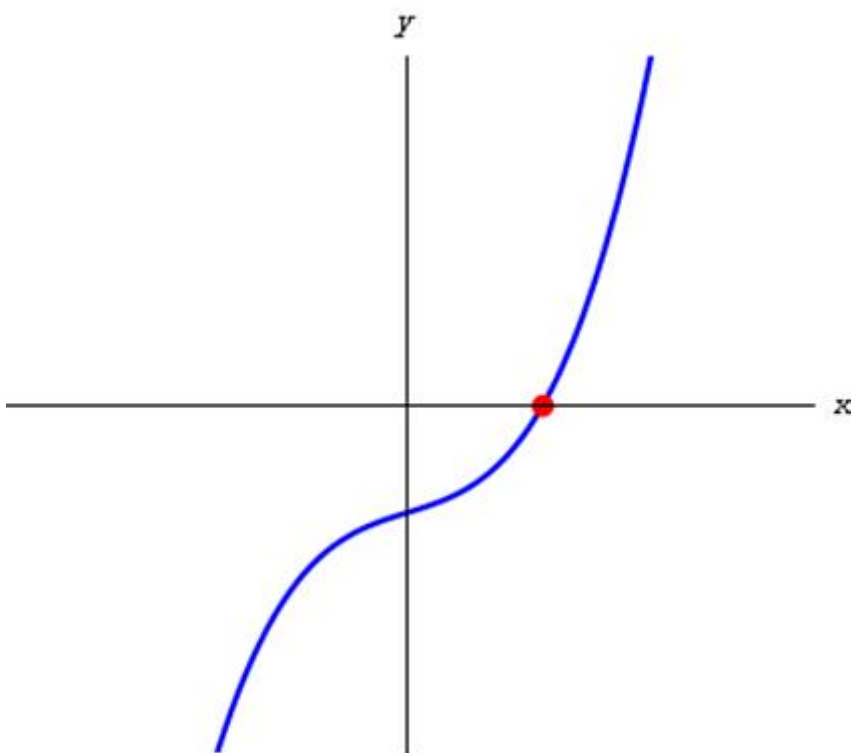
2.  $p < 0$  a  $q < 0$  - tento případ odpovídá rovnici (5) a graf příslušné funkce je zobrazen na obr. 120. V tomto případě je řešení rovnice (9) resp. rovnice (5) závislé na vzájemné

volbě koeficientů  $p$  a  $q$  - viz dále.

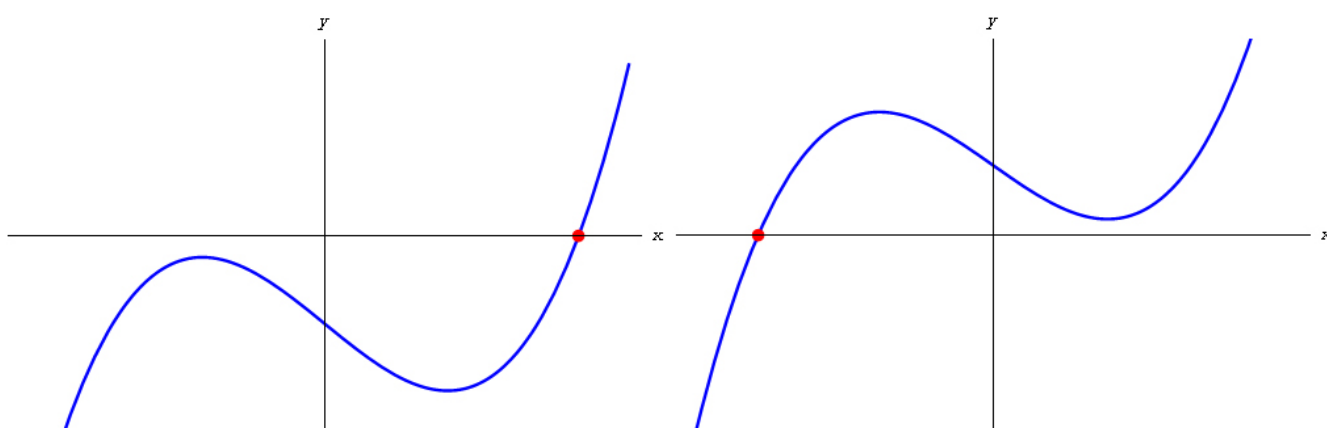
Počet a typ kořenů závisí na posunu grafu zobrazeném na obr. 120 hlavně po ose  $y$ .

3.  $p < 0$  a  $q > 0$  - tento případ odpovídá rovnici (6) a graf příslušné funkce je zobrazen na obr. 121. Také v tomto případě je řešení rovnice (9) resp. rovnice (6) závislé na vzájemné volbě koeficientů  $p$  a  $q$  - viz dále.

Případ řešení rovnice (9) pro  $p > 0$  a současně  $q > 0$  nebyl brán v Cardanově době v úvahu. Odporovalo to totiž tehdejšímu přístupu matematiků: součet kladných čísel v rovnici (9) nemohl být nikdy roven nule.



Obr. 119



Obr. 120

Obr. 121

Počet kořenů rovnice (9) pro  $p < 0$  závisí na hodnotě diskriminantu (17):

1.  $D > 0$  - lokální minimum a lokální maximum funkce dané předpisem (25) mají stejná znaménka a rovnice (9) má tedy jeden reálný kořen a dva komplexní kořeny (tyto kořeny jsou tvořeny navzájem komplexně sdruženými čísly) - viz grafy na obr. 120 a obr. 121.

Lokální maximum odpovídá vrcholu „kopečku“, který vytváří graf funkce; lokální minimum

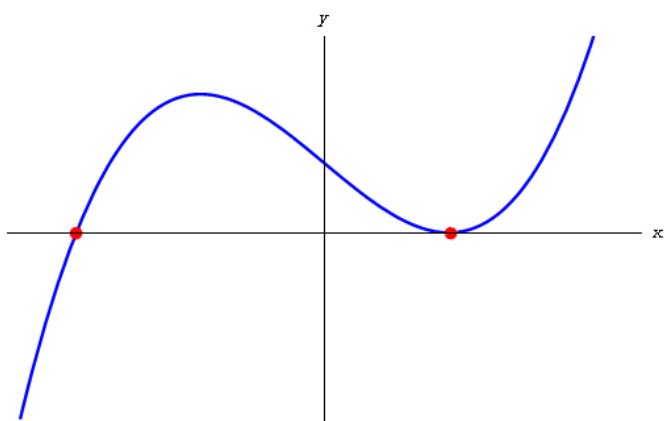
odpovídá „nejnižšímu bodu dolíku“ grafu funkce.

2.  $D = 0$  - hodnota lokálního minima funkce dané předpisem (25) nebo hodnota jejího lokálního maxima je nulová (tj. jedna z tečen sestavených v těchto dvou bodech je identická s osou  $x$  kartézského systému [souřadnic](#)). V těchto případech, které jsou zobrazeny na obr. 122 a obr. 123, má rovnice (9) jeden reálný kořen jednoduchý a jeden reálný kořen dvojnásobný.

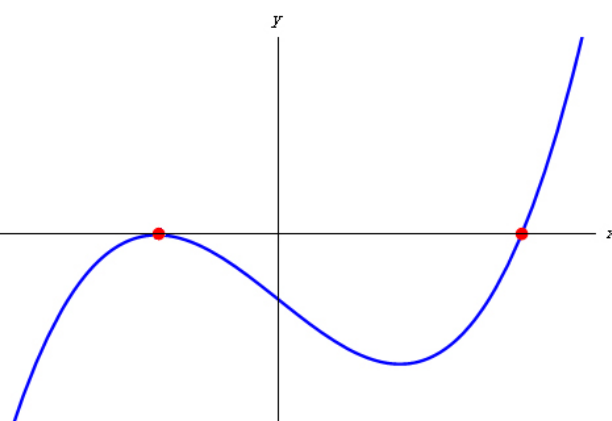
Dvojnásobný kořen odpovídá tomu bodu, ve kterém se „vlnka“ zobrazeného grafu dotkne osy  $x$ .

3.  $D < 0$  - lokální minimum a lokální maximum funkce dané předpisem (25) mají navzájem opačná znaménka a rovnice (9) má proto tři reálné kořeny - viz graf funkce zobrazený na obr. 124.

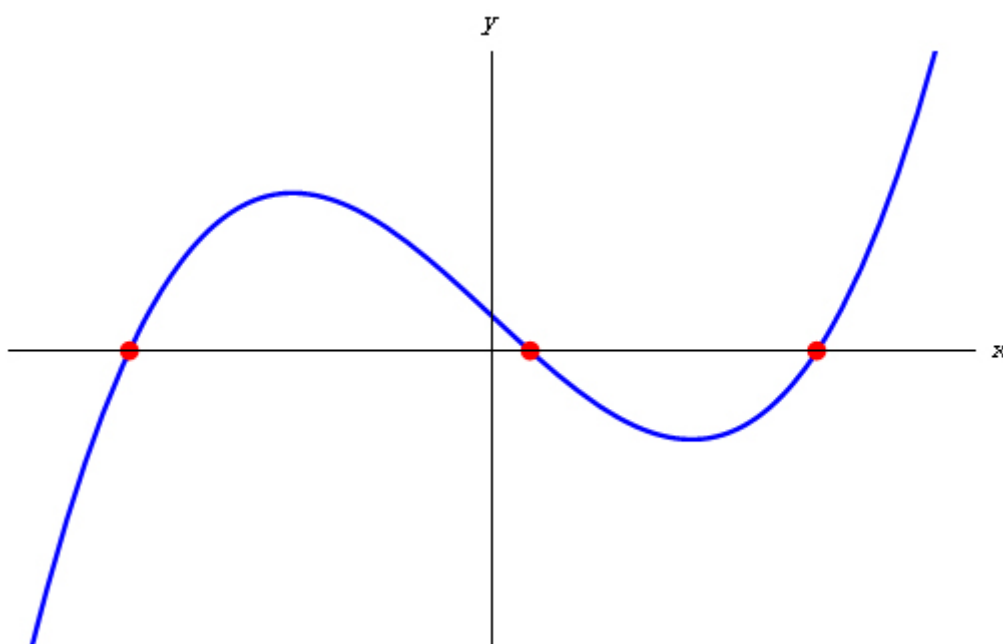
S využitím diferenciálního počtu lze ukázat, že součin funkční hodnoty lokálního minima funkce dané předpisem (25) a funkční hodnoty lokálního maxima této funkce je roven  $4D$ , kde  $D$  je diskriminant (17).



Obr. 122



Obr. 123



Obr. 124

Licence <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/> zakazuje úpravy a komerční distribuci.