Cardanovy vzorce

Cardanovy vzorce jsou vzorce pro výpočet kořenů kubické rovnice. V době, kdy Cardano své výpočty odvozoval, se začínala matematická symbolika teprve rozvíjet. Z důvodu lepšího pochopení Cardanova postupu bude ovšem výpočet proveden s využitím současné symboliky.

Kubická rovnice s reálnou neznámou *y* je rovnice ve tvaru

$$x_1 = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \qquad (3)$$

kde $A, B, C \in \mathbb{R}$. Skutečnost, že koeficient kubického členu je roven jedné, není na újmu obecnosti. Pokud by zde byl nějaký obecný koeficient, musel by být nenulový (jinak by rovnice (3) nebyla kubická). A nenulovým koeficientem lze celou rovnici vydělit. Proto můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat dále rovnici (3).

V době, kdy se Cardano zabýval řešením kubických rovnic, byly známy celkem tři typy kubických rovnic s **kladnými** koeficienty *a* a *b* a s **kladnou** neznámou *x*:

$$x^3 + a \cdot x = b, \qquad (4)$$

$$x^3 = a \cdot x + b \qquad (5)$$

a

$$x^3 + b = a \cdot x. \qquad (6)$$

Pokud bychom připustili, že *a*, *b* a *x* budou obecně reálná čísla, jsou rovnice (4) až (6) navzájem ekvivalentní. Ale na přelomu 15. století a 16. století byla matematika stále ještě pod vlivem řecké matematiky a částečně pod vlivem geometrického řešení úloh. Navíc práci s koeficienty matematici zatím neznali, a proto pracovali výhradně s kladnými čísly. Rovnice (4) až (6) tedy můžeme interpretovat takto: *kladné číslo se rovná jinému kladnému číslu*. Použít v těchto rovnicích znaménko „-“ není možné, protože by nebyl zaručen kladný výsledek.

Jak je vidět, rovnice (4) až (6) neobsahují kvadratický člen. Toto zjednodušení si mohli matematikové dovolit, protože uměli vhodnou substitucí kvadratický člen v kubické rovnici odstranit. Stačí v rovnici (3) použít substituci

$$y = x - \frac{A}{3}. \qquad (7)$$

Obecně lze podobnou substitucí v rovnici *n*-tého stupně vyloučit (*n* - 1)-ní člen. Za neznámou je v tomto případě nutné substituovat výraz $x - \frac{A_{n-1}}{n}$.

Dosazením vztahu (7) do rovnice (3) dostaneme: $\left(x - \frac{A}{3}\right)^3 + A \cdot \left(x - \frac{A}{3}\right)^2 + B \cdot \left(x - \frac{A}{3}\right) + C = 0$.

Umocněním získáme: $x^3 - A \cdot x^2 + \frac{A^2}{3}x - \frac{A^3}{27} + A \cdot x^2 - \frac{2}{3}A^2 \cdot x + \frac{A^3}{9} + B \cdot x - \frac{A \cdot B}{3} + C = 0$. Po úpravě pak máme rovnici:

$$x^3 + \left(B - \frac{A^2}{3}\right) \cdot x + \frac{2A^3}{27} - \frac{A \cdot B}{3} + C = 0. \qquad (8)$$

Abychom nemuseli dále pracovat s poměrně komplikovaně zapsanými koeficienty, přepíšeme rovnici (8) do tvaru

$$x^3 + p \cdot x + q = 0, \qquad (9)$$

kde

$$p = B - \frac{A^2}{3} \text{ a } q = \frac{2A^3}{27} - \frac{A \cdot B}{3} + C. \qquad (10)$$

Nyní budeme rovnici (9) řešit tak, jak jí řešil Cardano. Zavedeme další dvě proměnné *u* a *v* vztahem

$$x = u + v \qquad (11)$$

a dosadíme do rovnice (9). Dostaneme tak rovnici $(u+v)^3 + p \cdot (u+v) + q = 0$. Po umocnění a roznásobení získáme rovnici ve tvaru $u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0$. Další úpravou získáme rovnici ve tvaru $u^3 + v^3 + u(3uv + p) + v(3uv + p) + q = 0$ a tedy dostáváme rovnici

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0. \qquad (12)$$

Abychom rovnici (12) dále zjednodušili, je nutné nalézt další podmínky. První z podmínek je ta, že položíme

$$3uv + p = 0, \qquad (13)$$

protože v rovnici (9) nebyly smíšené členy obsahující součin $u \cdot v$. Vztah (13) můžeme psát ve tvaru $uv = -\frac{p}{3}$ a po umocnění na třetí získáme výraz

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}. \qquad (14)$$

Poslední úprava, kterou jsme provedli, se může zdát být umělá nebo nesmyslná - řešení se tím zdánlivě komplikuje. Ale pouze zdánlivě! Cardanův postup je poměrně promyšlený.

Dosazením podmínky (13) do rovnice (12) získáme rovnici

$$u^3 + v^3 + q = 0 \text{ resp. } u^3 + v^3 = -q. \qquad (15)$$

Na vztahy (14) a (15) lze nyní nahlížet jako na Viétovy vztahy pro řešení kvadratické rovnice s kořeny u^3 a v^3. Tato kvadratická rovnice (např. v proměnné *z*) má tedy tvar

$$z^2 + q \cdot z - \frac{p^3}{27} = 0. \qquad (16)$$

Nalezení řešení kvadratické rovnice (16) je již snadné. S využitím vztahu pro diskriminant kvadratické rovnice, můžeme postupně psát: $z_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4\cdot\frac{p^3}{27}}}{2} = \frac{-q \pm 2\cdot\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$. Diskriminant ve tvaru

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \tag{17}$$

bude důležitý pro další rozbor počtu řešení řešené rovnice (9).

Na základě Viétových vztahů (14) a (15) jsou ale kořeny rovnice (16) čísla označená jako u^3 a v^3. Proto můžeme psát

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ a } v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \tag{18}$$

Uvědomíme-li si, že rovnice (16) je pomocí substituce (11) odvozena z rovnice (9), můžeme pomocí řešení rovnice (16) vyjádřit i řešení rovnice (9). Musíme vzít ale ještě v úvahu substituci (11) a fakt, že rovnice (16) byla sestavena na základě Viétových vztahů (14) a (15). Pro řešení rovnice (9) tedy můžeme s využitím vztahů (18) psát $x_{1,2,3} = \sqrt[3]{u^3} + \sqrt[3]{v^3}$ a po dosazení dostáváme

$$x_{1,2,3} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{19}$$

Vztah (19) je matematickou podobou **Cardanova vzorce**. Je nutné si uvědomit, že třetí odmocniny je nutné (co do znaménka) vybrat tak, aby byla splněna podmínka (13). Klíčovou roli zde bude hrát číslo $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$, které je nutné vyjádřit pomocí komplexních čísel.

Rovnice třetího stupně totiž musí mít obecně (tj. v komplexních číslech) tři kořeny. A číslo $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$ je jedno z řešení rovnice

$$\varepsilon^3 - 1 = 0. \tag{20}$$

Je pravda, že tyto poznatky byly v matematice odvozeny až později, nicméně Cardano správně vytušil, že řešení mimo reálná čísla (aniž je tak nazýval) existovat bude. Vyplývá to i z diskuse, která je uvedena dále, počtu reálných kořenů v závislosti na parametrech *p* a *q* rovnice (9).

Rovnice (20) je tzv. binomická rovnice a ta má v tomto případě tato řešení vyjádřená komplexními čísly:

$$\varepsilon_0 = 1,\ \varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \text{ a } \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \tag{21}$$

kde i je tzv. imaginární jednotka, pro kterou platí $\mathrm{i}^2 = -1$. Dále budeme pracovat pouze s komplexním číslem ε, protože komplexní číslo ε_0 je rovno jedné a komplexní číslo ε_2 můžeme vyjádřit pomocí komplexního čísla ε. Platí totiž: $\varepsilon^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} + \frac{3}{4}\mathrm{i}^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \varepsilon_2$.

Nyní můžeme kořeny rovnice (9) tedy psát ve tvarech

$$\varepsilon^2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^2 = \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\frac{3}{4}\mathrm{i}^2 = \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}-\frac{3}{4} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \varepsilon_2, \tag{22}$$

$$x_2 = \varepsilon\cdot u+\varepsilon^2\cdot v = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \tag{23}$$

a

$$x_3 = \varepsilon^2\cdot u+\varepsilon\cdot v = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,. \tag{24}$$

Ve vztazích (22) až (24) vystupují komplexní čísla, která v Cardanově době nebyla známa. Stejně tak se teprve začínalo (pod vlivem Fibonacciho) počítat se zápornými čísly. Přesto byl schopen Cardano problém řešení kubické rovnice vyřešit.

Přesto, že jsou vztahy (22) až (24) vyjádřeny pomocí komplexních čísel, mohou při vhodné volbě koeficientů *p* a *q* vycházet reálná čísla. Stačí si uvědomit, že diskriminant (17) je definován jako součet dvou zlomků, přičemž zlomek $\frac{p^3}{27}$ může být záporný. Jeho absolutní hodnota může být větší, než je hodnota zlomku $\frac{q^2}{4}$, který též vystupuje v diskriminantu (17). Hodnota diskriminantu může být tedy kladná, záporná i nulová. Na tento diskriminant poté aplikujeme druhou odmocninu, jejímž výsledkem může být číslo reálné nebo komplexní. Výsledek pak přičteme (resp. odečteme) k dalšímu členu, a pak aplikujeme třetí odmocninu. Tato třetí odmocnina se počítá obecně z komplexního čísla - a výsledkem je opět komplexní číslo. Výsledek je pak násoben dalším komplexním číslem. A analogicky se vypočítá druhý člen ve vztazích (22) až (24). Proto lze vhodnou volbou koeficientů *p* a *q* získat různé typy čísel (reálná nebo komplexní) - v závislosti na tom, jak se navzájem odečtou členy obsahující imaginární jednotku i.

Vhodnou volbou parametrů *p* a *q* v rovnici (9) získáme jednu z původně vyšetřovaných rovnic (4), (5) nebo (6). Jednotlivé případy bude ilustrovat i graf funkce

$$f: y = x^3 + p\cdot x + q\,; \tag{25}$$

řešit rovnici (9) totiž znamená hledat průsečíky grafu funkce dané předpisem (25) s osou *x* kartézského systému. Mohou tedy nastat tyto případy:

1. $p > 0$ a $q < 0$ - tento případ odpovídá rovnici (4) a graf příslušné funkce je zobrazen na obr. 119. V tomto případě má rovnice (9) resp. rovnice (4) jeden reálný kořen a dva kořeny komplexní (komplexní kořeny není možné v uvedeném grafu vyznačit).

Funkce zobrazená na obr. 119 se bude pro různé volby *p* a *q*, které splňují výše uvedené podmínky, lišit jen posunem po ose *y* a deformací grafu. Tvar (tj. skutečnost, že graf protne osu *x* pouze jednou) zůstane přitom stále stejný.

Shodné vlastnosti by měl graf funkce dané předpisem (25) i pro případ $p = 0$. Tento případ ale nebyl v době, kdy Cardano vzorce publikoval, brán v úvahu.

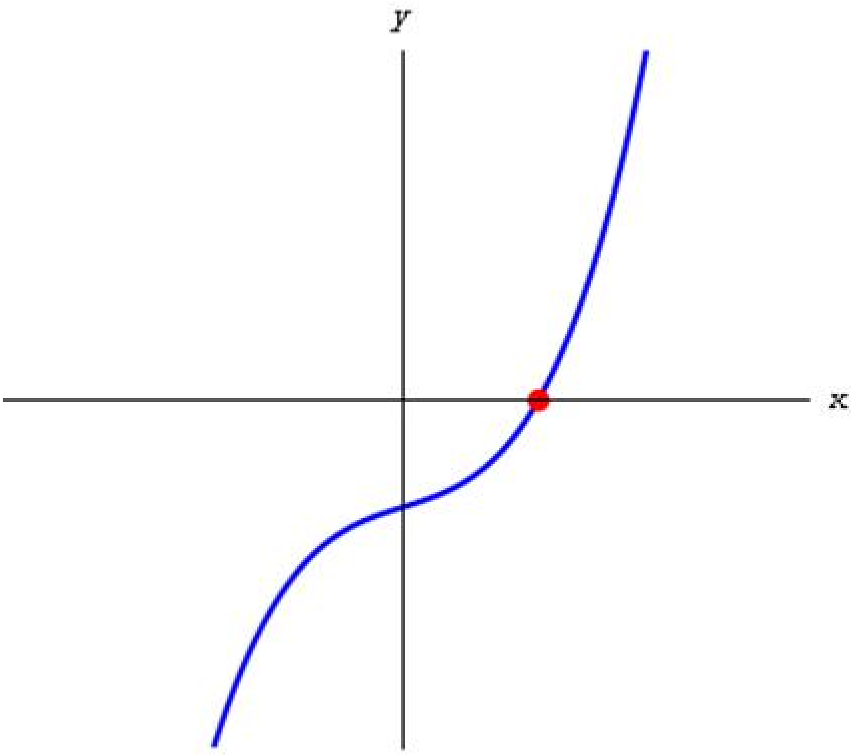
2. $p < 0$ a $q < 0$ - tento případ odpovídá rovnici (5) a graf příslušné funkce je zobrazen na obr. 120. V tomto případě je řešení rovnice (9) resp. rovnice (5) závislé na vzájemné

volbě koeficientů *p* a *q* - viz dále.

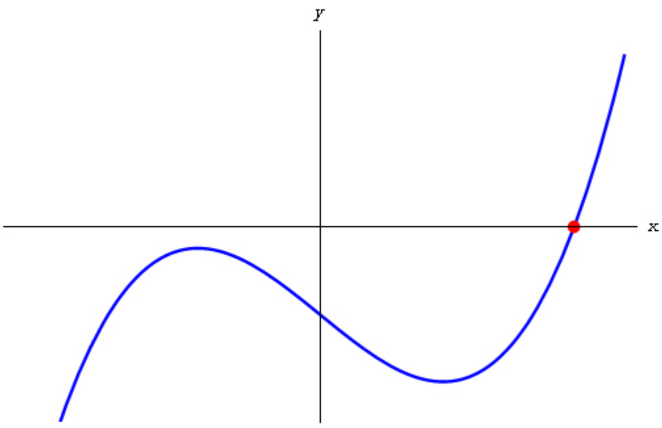
Počet a typ kořenů závisí na posunu grafu zobrazeném na obr. 120 hlavně po ose *y*.

3. $p < 0$ a $q > 0$ - tento případ odpovídá rovnici (6) a graf příslušné funkce je zobrazen na obr. 121. Také v tomto případě je řešení rovnice (9) resp. rovnice (6) závislé na vzájemné volbě koeficientů *p* a *q* - viz dále.

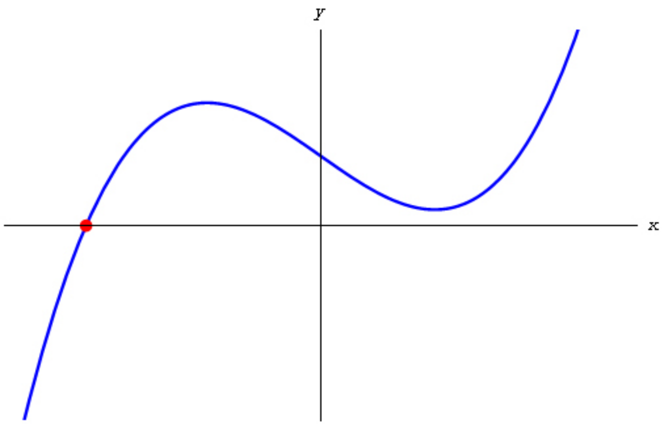
Případ řešení rovnice (9) pro $p > 0$ a současně $q > 0$ nebyl brán v Cardanově době v úvahu. Odporovalo to totiž tehdejšímu přístupu matematiků: součet kladných čísel v rovnici (9) nemohl být nikdy roven nule.



Obr. 119



Obr. 120



Obr. 121

Počet kořenů rovnice (9) pro $p < 0$ závisí na hodnotě diskriminantu (17):

1. $D > 0$ - lokální minimum a lokální maximum funkce dané předpisem (25) mají stejná znaménka a rovnice (9) má tedy jeden reálný kořen a dva komplexní kořeny (tyto kořeny jsou tvořeny navzájem komplexně sdruženými čísly) - viz grafy na obr. 120 a obr. 121.

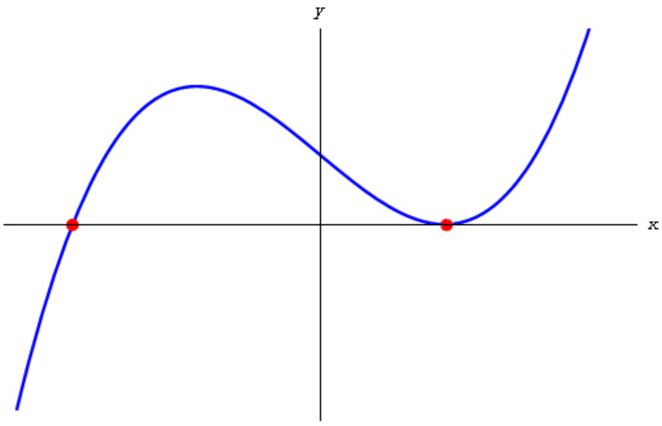
Lokální maximum odpovídá vrcholu „kopečku“, který vytváří graf funkce; lokální minimum odpovídá „nejnižšímu bodu dolíku“ grafu funkce.

2. $D = 0$ - hodnota lokálního minima funkce dané předpisem (25) nebo hodnota jejího lokálního maxima je nulová (tj. jedna z tečen sestrojených v těchto dvou bodech je identická s osou *x* kartézského systému souřadnic). V těchto případech, které jsou zobrazeny na obr. 122 a obr. 123, má rovnice (9) jeden reálný kořen jednoduchý a jeden reálný kořen dvojnásobný.

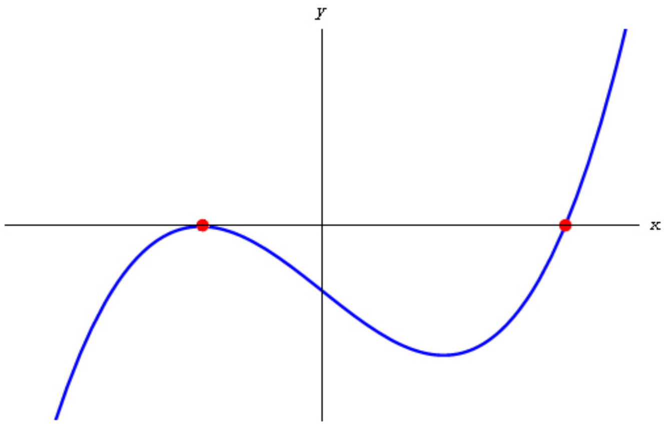
Dvojnásobný kořen odpovídá tomu bodu, ve kterém se „vlnka“ zobrazeného grafu dotkne osy *x*.

3. $D < 0$ - lokální minimum a lokální maximum funkce dané předpisem (25) mají navzájem opačná znaménka a rovnice (9) má proto tři reálné kořeny - viz graf funkce zobrazený na obr. 124.

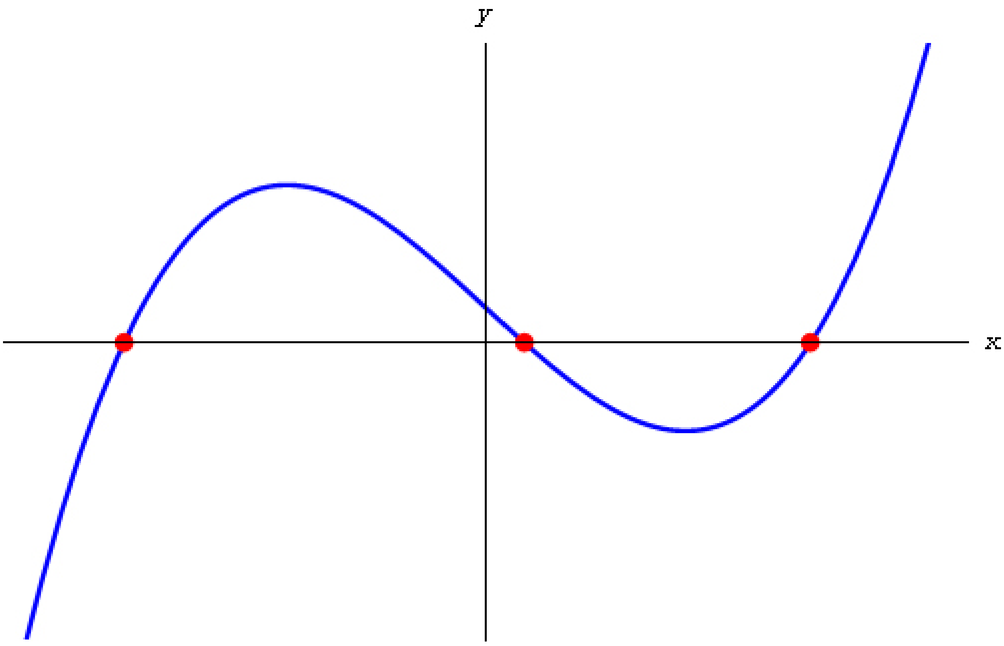
S využitím diferenciálního počtu lze ukázat, že součin funkční hodnoty lokálního minima funkce dané předpisem (25) a funkční hodnoty lokálního maxima této funkce je roven 4*D*, kde *D* je diskriminant (17).



Obr. 122



Obr. 123



Obr. 124