Pražská hodinová posloupnost

Označením *pražská hodinová posloupnost* nazývá britský matematik **NEIL JAMES ALEXANDER SLOANE** (narozen v roce 1939) nekonečnou posloupnost

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 3,\ 2,\ \ldots, \tag{8}$$

která je využita při konstrukci pomocného kolečka Staroměstského orloje v Praze.

Základní vlastností, díky které našla tato posloupnost využití ve stroji orloje, je skutečnost, že částečné součty této posloupnosti odpovídají počtu úderů zvonu orloje v každou celou hodinu. Schéma na obr. 174 ukazuje tyto součty pro prvních několik hodin. Analogicky by bylo možné pokračovat dále - a to nejen do počtu 24, což je největší počet úderů, který najednou může zaznít z pražského orloje.

$$\underset{1}{1}\quad \underset{2}{2}\quad \underset{3}{3}\quad \underset{4}{4}\quad \underbrace{3\ \ 2}_{5}\quad \underbrace{1\ \ 2\ \ 3}_{6}\quad \underbrace{4\ \ 3}_{7}\quad \underbrace{2\ \ 1\ \ 2\ \ 3}_{8}\quad \underbrace{4\ \ 3\ \ 2}_{9}\quad \underbrace{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4}_{10}\quad \underbrace{3\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 3}_{11}\cdots$$

Obr. 174

Jak se ukazuje, posloupnost (8) je jediná, kterou lze použít ke stabilizaci odbíjení zvonu na orloji či na jiném přístroji měřícím čas. Částečné součty jiných posloupností výše uvedenou vlastnost nemají.

Ze všech periodických posloupností lze oddělit tzv. šindelovské posloupnosti. Tyto posloupnosti byly pojmenovány podle českého astronoma Jana Šindela, který se podílel na přípravě matematického modelu pražského orloje. Šindelovská posloupnost velmi úzce souvisí s tzv. trojúhelníkovými čísly. Tato čísla jsou speciálním typem tzv. figurálních čísel, o která se velmi zajímali pythagorejci.

ČÍSLO T_k SE NAZÝVÁ TROJÚHELNÍKOVÉ ČÍSLO, JESTLIŽE PLATÍ

$$T_k = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \tag{9}$$

KDE $k \in \mathbb{N}$.

Trojúhelníkové číslo má tento název proto, že když číslo modelujeme např. pomocí papírových žetonů, lze tyto žetony poskládat do tvaru trojúhelníka (viz obr. 175).

PERIODICKÁ POSLOUPNOST $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ PRO $a_i \in \mathbb{N}$ SE NAZÝVÁ ŠINDELOVSKÁ POSLOUPNOST, JESTLIŽE PRO KAŽDÉ $k \in \mathbb{N}$ EXISTUJE $n \in \mathbb{N}$ TAK, ŽE PLATÍ

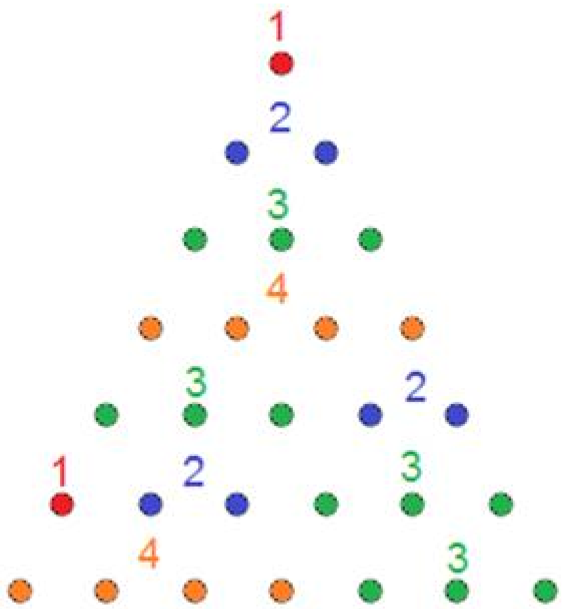
$$T_k = \sum_{i=1}^{n} a_i\,. \tag{10}$$

Trojúhelníkové číslo na levé straně vztahu (10) je dáno předpisem (9) a určuje součet hodin na velkém závěrkovém kole orloje, zatímco součet na pravé straně vztahu (10) odpovídá celkovému pootočení pomocného kolečka. Přitom pro *k*-tou hodinu platí vztah

$$k = T_k - T_{k-1} = \sum_{i=m+1}^{n} a_i \,, \qquad (11)$$

kde $T_{k-1} = \sum_{i=1}^{m} a_i$. Vzhledem k tomu, že pro všechna *i* je $a_i > 0$, je číslo *n* ve vztahu (10) určeno jednoznačně. Ze vztahů (9) a (10) navíc vyplývá důležitá vlastnost: je-li posloupnost $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ šindelovská, pak $a_1 = 1$.

Na obr. 175 je schematicky zobrazeno trojúhelníkové číslo $T_7 = 28$; proč právě toto číslo bude zřejmé z dalšího textu. Barevné kroužky v *k*-tém řádku znázorňují počet úderů zvonu v *k*-té hodině (viz obr. 174 a vztah (11)). Celkový počet úderů zvonu od jedné hodiny po půlnoci do *k*-té hodiny (včetně) udává trojúhelníkové číslo T_k . Čísla nad barevnými kroužky udávají délky segmentů mezi zářezy pomocného kolečka pražského orloje (a současně také členy šindelovské posloupnosti).



Obr. 175

Nyní označíme součet členů periody, která má délku *p*, posloupnosti $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ symbolem *s*. Platí tedy

$$s = \sum_{i=1}^{p} a_i \,. \qquad (12)$$

Nyní můžeme nahradit podmínku (tj. vztah (10)) uvedenou v definici šindelovské posloupnosti podmínkou jednodušší, která obsahuje pouze konečný počet čísel *k*.

PERIODICKÁ POSLOUPNOST $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ JE PRO LICHÉ s ŠINDELOVSKÁ POSLOUPNOST, JESTLIŽE PRO KAŽDÉ PŘIROZENÉ ČÍSLO k DANÉ VZTAHEM

$$k < \frac{s+1}{2} \tag{13}$$

EXISTUJE $n \in \mathbb{N}$ TAK, ŽE PLATÍ VZTAH (10).

Pro pražskou hodinovou posloupnost (8) je $s = 1+2+3+4+3+2 = 15$, tj. v souladu se vztahem (13) stačí ověřit, zda je tato posloupnost šindelovská, pro $k < \frac{15+1}{2} = 8$, tj. stačí uvažovat *k* rovno nejvýše 7. Podle vztahu (10) tedy musí existovat příslušné $n \in \mathbb{N}$, jinými slovy musíme najít určitý počet sčítanců, jejichž součet bude roven číslu T_7. Podle vztahu (9) je $T_7 = \frac{7 \cdot (7+1)}{2} = 28$. Součet prvních sedmi členů pražské hodinové posloupnosti je roven: $1+2+3+4+5+6+7 = 28$. Jinými slovy, podařilo se najít přirozené *n* určující počet členů pražské hodinové posloupnosti, které je nutné sečíst, abychom získali trojúhelníkové číslo T_7. To, že v tomto případě platí $n = k$, je náhoda!

Pražská hodinová posloupnost je tedy šindelovská posloupnost.

Lze zkonstruovat i další šindelovské posloupnosti a to jak pro lichá, tak i pro sudá *s* (viz vztah (12)), ale posloupnost (8) použitá na pražském orloji je nejelegantnější a nejlépe vyhovuje praktickým potřebám orloje.
