

Chladnutí kávy - přímý výpočet

Hledání přesného řešení dané závislosti znamená řešit diferenciální rovnici, kterou získáme ze vztahu (3) tak, že od konečného rozdílu [fyzikálních veličin](#) $\Delta\tau$ a Δt přejdeme k příslušným diferenciálům. Získáme tedy **diferenciální rovnici** ve tvaru

$$-k \cdot (t - t_{\text{ok}}) \cdot d\tau = m \cdot c \cdot dt, \quad (4)$$

kteřou můžeme řešit pomocí metody zvané **separace proměnných**. Proměnné převedeme v rovnici (4) na stejnou stranu rovnice, jako stojí příslušné diferenciály, a konstanty převedeme také na jednu stranu rovnice. Dostaneme tak rovnici

$$-\frac{k}{m \cdot c} \cdot d\tau = \frac{dt}{t - t_{\text{ok}}}. \quad (5)$$

Tuto rovnici formálně zintegrujeme, čímž jí převedeme do tvaru:

$$\int \left(-\frac{k}{m \cdot c} \right) \cdot d\tau = \int \frac{dt}{t - t_{\text{ok}}}. \quad (6)$$

Po zintegrování rovnice (6) získáme vztah

$$-\frac{k}{m \cdot c} \cdot \tau + C = \ln(t - t_{\text{ok}}), \quad (7)$$

kde C je integrační konstanta, která v tomto případě určuje počáteční podmínky řešené úlohy.

Definiční vztah funkce přirozený logaritmus, která vystupuje ve vztahu (7), je v pořádku, neboť během celého popisovaného děje je $t > t_{\text{ok}}$, a tedy $t - t_{\text{ok}} > 0$. Káva tedy v konečném čase nedosáhne [teploty](#) okolí; to okomentujeme ještě níže.

Vztah (7) vyjádříme pomocí ekvivalentního tvaru $t - t_{\text{ok}} = e^{-\frac{k}{m \cdot c} \tau - C}$ resp. tvaru

$$t = t_{\text{ok}} + K \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \tau}, \quad (8)$$

kde $K = e^C$ je konstanta. Tuto konstantu K určíme na základě počátečních podmínek: v čase $\tau = 0$ měla káva teplotu t_0 . Můžeme tedy dosadit do vztahu (8) a psát:

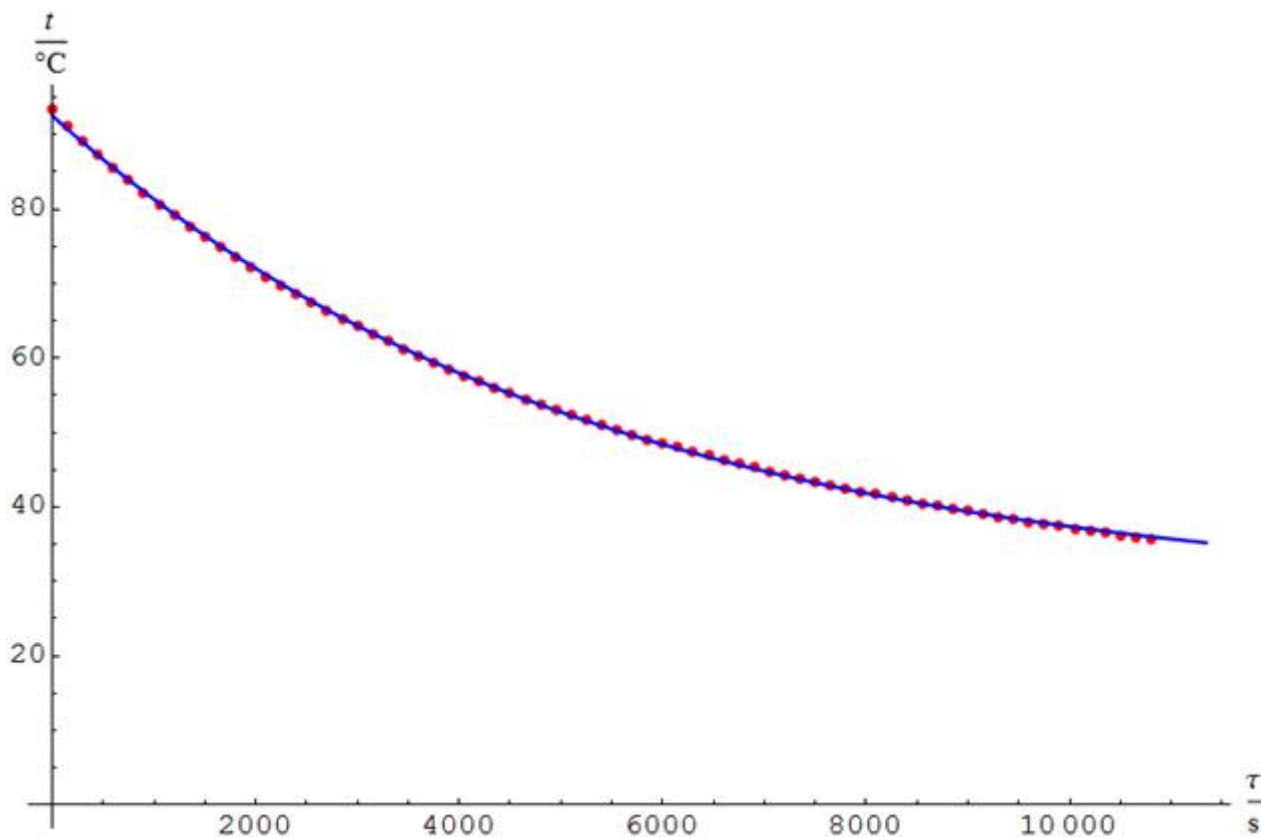
$t_0 = t_{\text{ok}} + K \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot 0} = t_{\text{ok}} + K \cdot e^0 = t_{\text{ok}} + K$. Pro konstantu K tedy dostáváme:

$$K = t_0 - t_{\text{ok}}. \quad (9)$$

Dosazením vztahu (9) do vztahu (8) získáme hledanou závislost okamžité teploty kávy na čase ve tvaru

$$t = t_{\text{ok}} + (t_0 - t_{\text{ok}}) \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \tau}. \quad (10)$$

Závislost popsaná vztahem (10) je zobrazená spolu s naměřenými daty na obr. 8.



Obr. 8

Rychlý fyzikální odhad faktu, že závislost popsaná vztahem (10) odpovídá realitě, můžeme ověřit pomocí krajních hodnot času. Pro $\tau = 0$ dostáváme $t = t_{\text{ok}} + (t_0 - t_{\text{ok}}) \cdot e^{-\frac{\tau}{m\tau_0}} = t_{\text{ok}} + t_0 - t_{\text{ok}} = t_0$, tj. káva má počáteční teplotu. Pro teplotu kávy po dostatečně dlouhé době od počátku jejího chladnutí, tj. pro $\tau \rightarrow \infty$ a tedy $e^{-\frac{\tau}{m\tau_0}} \rightarrow 0$, dostáváme $t = t_{\text{ok}} + (t_0 - t_{\text{ok}}) \cdot 0 = t_{\text{ok}}$. Káva dosáhne teploty okolí tedy až po nekonečně dlouhé době.

Ve skutečnosti každý [teploměr](#), kterým budeme teplotu kávy měřit, má určitou přesnost měření, a proto pomocí něj naměříme teplotu kávy rovnou teplotě okolí již v konečném čase.