Chladnutí kávy - přilití mléka

S problémem chladnutí kávy souvisí i další problém, který v běžném životě občas řešíme. Uvaříme si kávu a do odchodu z domova nám zbývá doba τ_{odchod}. Na stole stojí mléko, které má stejnou teplotu jako okolí, tj. teplotu t_{ok}. Kdy je třeba nalít mléko do kávy, aby se teplota směsi kávy s mlékem co nejvíce snížila a bylo možné jí vypít?

Předpokládejme, že káva má teplotu *t*, která je dána vztahem (10), hmotnost *m* a měrnou tepelnou kapacitu *c*. Počáteční teplota mléka je t_m, jeho hmotnost m_m a měrná tepelná kapacita je c_m. Teplota, na kterou se směs kávy s mlékem ochladí, je t_{km}.

S využitím kalorimetrické rovnice tedy můžeme psát:

$$m \cdot c \cdot (t - t_{km}) = m_m \cdot c_m \cdot (t_{km} - t_{ok}) . \tag{16}$$

Pomocí matematických úprav vyjádříme hledanou výslednou teplotu t_{km}. Rovnici (16) proto nejdříve roznásobíme, čímž získáme tvar $m \cdot c \cdot t - m \cdot c \cdot t_{km} = m_m \cdot c_m \cdot t_{km} - m_m \cdot c_m \cdot t_{ok}$. Po převedení členů s neznámou t_{km} na jednu stranu rovnice dostaneme rovnici ve tvaru $m \cdot c \cdot t_{km} + m_m \cdot c_m \cdot t_{km} = m \cdot c \cdot t + m_m \cdot c_m \cdot t_{ok}$. Odtud již získáme hledaný vztah pro teplotu t_{km} výsledné směsi ve tvaru

$$t_{km} = \frac{m \cdot c \cdot t + m_m \cdot c_m \cdot t_{ok}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} . \tag{17}$$

Vztah (17) není pro další úvahy v nejlepším možném tvaru. Proto provedeme matematické úpravy tak, abychom jej získali v lepším tvaru. Nejdříve ke stávajícímu čitateli přičteme a odečteme výraz $m \cdot c \cdot t_{ok}$. Tím získáme pro výslednou teplotu vztah $t_{km} = \frac{m \cdot c \cdot t + m_m \cdot c_m \cdot t_{ok} + m \cdot c \cdot t_{ok} - m \cdot c \cdot t_{ok}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}$. Nyní vytkneme výrazy tak, abychom v čitateli získali rozdíl teplot $t - t_{ok}$: $t_{km} = \frac{(m \cdot c + m_m \cdot c_m) \cdot t_{ok} + m \cdot c \cdot (t - t_{ok})}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}$. Po rozdělení na dva zlomky a zkrácení, získáme vztah

$$t_{km} = t_{ok} + \frac{m \cdot c \cdot (t - t_{ok})}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} . \tag{18}$$

Vztah (18) (stejně tak s ním ekvivalentní vztah (17)) popisují výslednou teplotu směsi kávy a mléka. Přitom teplota *t* je teplota samotné kávy před přilitím mléka. A tato teplota je dána vztahem (10). Proto nyní dosadíme vztah (10) do vztahu (18) a získáme: $t_{km} = t_{ok} + \frac{m \cdot c}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \cdot \left(t_{ok} + (t_0 - t_{ok}) \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \tau} - t_{ok} \right)$. Po úpravě tedy máme:

$$t_{km} = t_{ok} + \frac{m \cdot c}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \cdot (t_0 - t_{ok}) \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \tau} . \tag{19}$$

Od tohoto okamžiku (tj. po přilití mléka do kávy) bude chladnout nejen káva, ale i mléko. Proto musíme vztah (19) opravit o tuto skutečnost. Káva spolu s mlékem bude chladnout po dobu

$\tau_{odchod} - \tau$, proto můžeme psát:

$$t_{km} = t_{ok} + \frac{m \cdot c}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \cdot \left(t_0 - t_{ok}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot \tau} \cdot e^{-\frac{k_{km}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \left(\tau_{odchod} - \tau\right)} . \qquad (20)$$

Samotná káva chladla po dobu τ, na celé chladnutí kávy včetně dolitého mléka máme celkovou dobu τ_{odchod}.

Při opravě vztahu (19) na vztah (20) jsme upravili i exponent exponenciální funkce. Konstantu $\frac{k}{m \cdot c}$ jsme nahradili konstantou $\frac{k_{km}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}$, protože už se neochlazuje jen káva, ale také mléko. A při dolévání mléka se mohla změnit např. i plocha povrchu kapaliny, ... - proto je použita i konstanta k_{km} místo konstanty *k*.

Abychom mohli provést další fyzikální rozbor, upravíme exponenciální funkce ze vztahu (20): $e^{-\frac{k}{m \cdot c} \cdot \tau} \cdot e^{-\frac{k_{km}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \left(\tau_{odchod} - \tau\right)} = e^{-\frac{k}{m \cdot c} \tau - \frac{k_{km}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \tau_{odchod} - \frac{k_{km}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \tau} = e^{-\frac{k_{km}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \tau_{odchod}} \cdot e^{-\left(\frac{k}{m \cdot c} - \frac{k_{km}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}\right) \tau}$. Výhodou této úpravy je to, že činitel $e^{-\frac{k_{km}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \tau_{odchod}}$ nezávisí na čase; doba, která zbývá od zalití kávy do jejího vypití (tj. doba τ_{odchod}) je konstantní. Vztah (20) můžeme tedy přepsat ve tvaru

$$t_{km} = t_{ok} + \frac{m \cdot c}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \cdot \left(t_0 - t_{ok}\right) \cdot e^{-\frac{k_{km}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m} \tau_{odchod}} \cdot e^{-\left(\frac{k}{m \cdot c} - \frac{k_{km}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}\right) \tau} . \qquad (21)$$

Na základě vztahu (21) můžeme učinit tyto závěry:

Pokud bude platit $\frac{k}{m \cdot c} = \frac{k_{km}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}$, pak vztah (20) a tedy ani vztah (21) nezávisejí na čase. To by znamenalo, že mléko o stejné teplotě, jako je teplota okolí, by bylo možné do kávy přilít kdykoliv během doby τ_{odchod}. Výše uvedená rovnost ale neplatí. Zatímco konstanty *k* a k_{km} jsou téměř stejné (plocha povrchu kapaliny se dolitím mléka příliš nezmění), tak hmotnost mléka ani jeho měrná tepelná kapacita nejsou nulové.

Pokud by měla platit rovnost $\frac{k}{m \cdot c} = \frac{k_{km}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}$ a jsou-li konstanty *k* a k_{km} téměř stejné, pak by musel být součin $m_m \cdot c_m$ nulový. A to není fyzikálně možné!

Proto bude platit $\frac{k}{m \cdot c} > \frac{k_{km}}{m \cdot c + m_m \cdot c_m}$, tj. káva s mlékem chladne pomaleji než samotná káva. Proto je vhodné přilít mléko do kávy co nejpozději.

V popsané situaci závisí i na dalších vlivech, které průběh chladnutí ovlivní: způsob promíchání kávy s mlékem, odpařování z povrchu kapaliny, možnost použít chladnější mléko z chladničky a další fyzikální jevy. Nejvýznamnější vliv bude mít odpařování vody z povrchu kapaliny. Vypařování můžeme ovlivnit změnou tlaku páry nad kapalinou (snížení tlaku dosáhneme např. foukáním vzduchu nad hladinou kapaliny).

© Encyklopedie Fyziky (http://fyzika.jreichl.com); Jaroslav Reichl, Martin Všetička
Licence http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/ zakazuje úpravy a komerční distribuci.