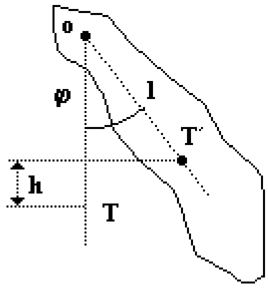
***Fyzické kyvadlo

Matematické kyvadlo se špatně realizuje - v praxi je nesestrojitelné. Skutečná kyvadla jsou vždy tuhá tělesa, která jsou zavěšena tak, aby se mohla kývat kolem osy procházející nad těžištěm. Takové kyvadlo se nazývá **fyzické kyvadlo**. Odvození na úrovni střední školy není zcela přímočaré, ale přesto se můžeme alespoň přiblížit. Vyjdeme ze zákona zachování energie (viz obr. 14).



Obr. 14

Kyvadlo popíšeme pomocí vzdálenosti *l* těžiště od osy otáčení, hmotnosti kyvadla *m* a momentu setrvačnosti *J* vzhledem k ose symetrie (tj. ose procházející těžištěm kyvadla). Při vychýlení kyvadla o malý úhel φ do výšky *h* získá kyvadlo potenciální energii (vzhledem ke své rovnovážné poloze) E_p. Výšku h lze vyjádřit pomocí goniometrické funkce $\cos\varphi = \frac{l-h}{l}$, odkud dostáváme $h = l\left(1-\cos\varphi\right)$. Potenciální energii, kterou má kyvadlo v této výšce lze psát ve tvaru $E_p = mgh = mgl\left(1-\cos\varphi\right)$. Vzhledem k tomu, že nás zajímají malé rozkyvy kyvadla, lze použití přibližný vztah $1-\cos\varphi \doteq \frac{\varphi^2}{2}$, který pro malé úhly platí. Potenciální energii pak lze psát ve tvaru $E_p \doteq mgl\frac{\varphi^2}{2}$.

Důkaz přibližné rovnosti $1-\cos\varphi \doteq \frac{\varphi^2}{2}$ platící pro malé úhly lze provést pomocí limity. Přepíšeme-li si tento vztah jinak, dostaneme $\frac{1-\cos\varphi}{\varphi^2} \doteq \frac{1}{2}$. Má-li vztah platit přibližně pro malé úhly, pak hledáme limitu z tohoto výrazu, v němž se φ blíží k nule. Lze tedy postupně psát: $\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{1-\cos\varphi}{\varphi^2} = \lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{1-\cos\varphi}{\varphi^2}\cdot\frac{1+\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = \lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{1-\cos^2\varphi}{\varphi^2\left(1+\cos\varphi\right)} = \lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2\left(1+\cos\varphi\right)} = \frac{1}{2}$.

Funkce $y = 1-\cos x$ se tedy v okolí počátku soustavy souřadnic (tedy pro malý rozkyv kyvadla) chová podobně jako funkce $y = \frac{x^2}{2}$.

Potenciální energie se bude po uvolnění kyvadla měnit v kinetickou energii rotačního pohybu $E_k = \frac{1}{2}J_1\omega^2$, kde $J_1 = J + ml^2$ je moment setrvačnosti vzhledem k ose, kolem níž se kyvadlo kýve, vypočítaný na základě Steinerovy věty a ω úhlová rychlost rotačního pohybu. Ze zákona zachování mechanické energie dostáváme $E_p = E_k$ a po dosazení $mgl\varphi^2 = \left(J+ml^2\right)\omega^2$. Odtud dostáváme úhlovou frekvenci kmitání fyzického kyvadla ve tvaru $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J+ml^2}}$. Tento vztah je možné upravit na

$\omega = \sqrt{\frac{g}{\frac{J+ml^2}{ml}}}$, kde $\frac{J+ml^2}{ml} = l_{\mathrm{red}}$ je tzv. **redukovaná délka** fyzického kyvadla.

Fyzické kyvadlo se tedy kýve se stejnou periodou jako kyvadlo matematické, je-li redukovaná délka fyzického kyvadla stejná jako délka matematického kyvadla.
