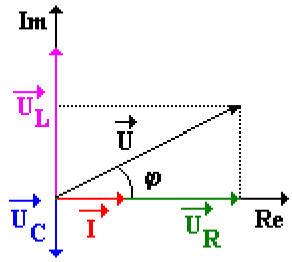
Sériový RLC obvod - popis pomocí komplexních čísel

Přeformulováním řady fyzikálních problémů do komplexních čísel se tyto problémy většinou matematicky zjednoduší. S komplexními čísly se totiž velmi jednoduše pracuje a pro každý typ úlohy (podle matematického zápisu rovnic, podle povahy hledaného řešení, ...) je vhodný jiný zápis komplexních čísel. Důležité je ovšem na konci úlohy správně interpretovat získané řešení, tj. přiřadit komplexním číslům (resp. jejich imaginárním částem) správný fyzikální smysl.

Na základě fyzikálního popisu sériového RLC obvodu, který je zobrazen na obr. 175, je možné zakreslit fázory proudu a napětí na jednotlivých prvcích obvodu i do Gaussovy roviny, do níž se zobrazují komplexní čísla. Proud procházející obvodem je na všech prvcích obvodu stejný a má nulový fázový posun vůči napětí na rezistoru. Proto se obě tyto veličiny zobrazují na reálnou osu (viz obr. 177).

Napětí na cívce, které se předbíhá oproti proudu procházejícímu cívkou právě o $\frac{\pi}{2}$, se zobrazuje na kladnou imaginární poloosu. Analogicky se napětí na kondenzátoru (které se za proudem tekoucím kondenzátorem o $\frac{\pi}{2}$ opožďuje) zobrazí na zápornou imaginární poloosu. Grafická znázornění na obr. 176 a obr. 177 jsou tedy velmi podobná. Výpočet se ale liší.



Obr. 177

Napětí $\mathbf{U}_R$ na rezistoru o odporu *R* je dáno vztahem $\mathbf{U}_R = R\mathbf{I}$.

Fázory jsou v textu označené tučným písmem a na obrázcích (aby nemohlo dojít k záměně se skalárními veličinami) jsou označené jako vektory.

Napětí $\mathbf{U}_L$ na cívce o indukčnosti *L* je dáno vztahem $\mathbf{U}_L = X_L\mathbf{I} = \omega L\mathbf{I}\mathrm{j}$, kde *j* je imaginární jednotka, pro kterou platí $j^2 = -1$.

V matematice se tatáž imaginární jednotka značí symbolem *i*. Symbol *j* je zde volen záměrně, aby nedocházelo k záměně s okamžitou hodnotou proudu, která se značí *i*. Přeznačením imaginární jednotky se matematické definice a pravidla, kterými se počítání s komplexními čísly řídí, nezmění!

Analogicky lze definovat napětí $\mathbf{U}_C$ na kondenzátoru vztahem $\mathbf{U}_C = X_C\mathbf{I} = \frac{\mathbf{I}}{\omega C\mathrm{j}}$.

Na první pohled není jasné, že napětí na kondenzátoru U_C má fázový posun vůči proudu, který má mít - tj. že se za proudem v obvodu zpožďuje o čtvrt periody. To je možné ukázat tak, že napětí vyjádříme tak, jak se komplexní čísla běžně vyjadřují, tj. s imaginární jednotkou v čitateli: $\mathbf{U}_C = \frac{\mathbf{I}}{\omega C\mathrm{j}} = \frac{\mathbf{I}}{\omega C\mathrm{j}}\cdot\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}} = \frac{\mathbf{I}}{\omega C\mathrm{j}^2}\mathrm{j} = -\frac{\mathbf{I}}{\omega C}\mathrm{j}$.

Z tohoto vztahu je vidět, že napětí na kondenzátoru skutečně má smysl nanášet v Gaussově rovině na zápornou imaginární poloosu.

Jiným způsobem je možné odvodit kapacitanci kondenzátoru pomocí goniometrického tvaru komplexních čísel. Stačí si uvědomit, že napětí na kondenzátoru v obvodu střídavého proudu je vzhledem k proudu posunuto o $-\frac{\pi}{2}$. Pak lze psát: $X_C = \frac{1}{\omega C}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{j}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{\mathrm{j}}{\omega C}$.

Pro napětí zdroje platí: $\mathbf{U} = \mathbf{U}_\mathrm{R} + \mathbf{U}_\mathrm{L} + \mathbf{U}_\mathrm{C}$.

Sčítáme fázory, v nichž je zahrnut i fázový posun dané veličiny, takže je možné tento vztah napsat. Analogický vztah pro hodnoty napětí (tj. vztah psaný normálním písmem) je neplatný!

Po dosazení dostáváme $\mathbf{U} = R\mathbf{I} + \omega L\mathbf{I}\mathrm{j} - \frac{\mathbf{I}}{\omega C}\mathrm{j} = R\mathbf{I} + \left(\omega L\mathbf{I} - \frac{\mathbf{I}}{\omega C}\right)\mathrm{j} = \mathbf{I}\left[R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\mathrm{j}\right]$.

Číselná hodnota výsledného napětí *U* je pak dána absolutní hodnotou komplexního čísla, ve které už nevystupuje imaginární jednotka *j*: $U = I\left|R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\mathrm{j}\right| = I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$, což je stejný vztah jako vztah, který byl odvozen pro sériový RLC obvod s použitím reálných čísel.

Pro impedanci pak platí: $\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}} = R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\mathrm{j}$ a její číselná hodnota je dána vztahem $Z = \left|R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\mathrm{j}\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$, což je opět stejný vztah, který byl odvozen při popisu sériového RLC obvodu pomocí reálných čísel.

Pro fázový rozdíl napětí a proudu v obvodu lze použít stejný vztah jako je vztah odvozený pro sériový RLC obvod pomocí reálných čísel (viz obr. 177): $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{U_\mathrm{L} - U_\mathrm{C}}{U_\mathrm{R}} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$, $\varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Matematický popis rezonance se neliší. Při rezonanci prochází obvodem maximální proud a proto je tedy impedance obvodu minimální. To znamená, že $X_\mathrm{L} = X_\mathrm{C}$, odkud přímo vyplývá vztah pro rezonanční frekvenci f_0: $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.