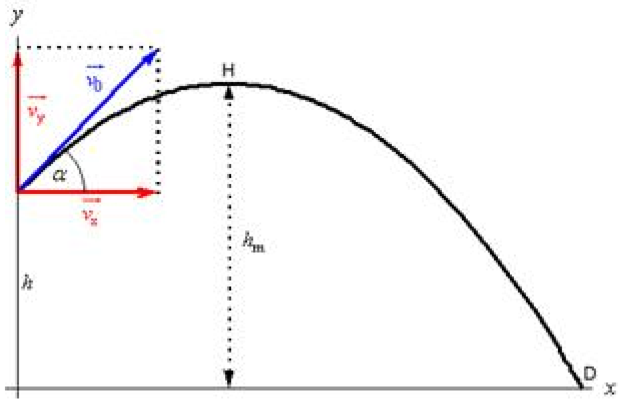
***Vrhy těles obecně

Jednotlivé vrhy těles lze odvodit v závislosti na směru vektoru počáteční rychlosti $\vec{v_0}$. Všechny uvažované vrhy lze přitom odvodit najednou z obecného vrhu: ze šikmého vrhu vzhůru z nenulové počáteční výšky *h* nad vodorovnou rovinou (viz obr. 76). Při řešení nebudeme uvažovat odporové síly, kterými na pohybující se hmotný bod působí okolní vzduch.

Vztahy pro jednotlivé vrhy (vrh svislý, vrh vodorovný, vrh šikmý) dostaneme z výsledných vztahů tohoto obecného vrhu speciální volbou směru počáteční rychlosti a výšky nad vodorovnou rovinou, v níž vrh začíná.



Obr. 76

Vektor počáteční rychlosti $\vec{v_0}$ vrženého hmotného bodu si (stejně jako u vrhu šikmého v odstavci 5.5.2.4) rozložíme na dva navzájem kolmé vektory $\vec{v_x}$ a $\vec{v_y}$, které jsou rovnoběžné s osami kartézského systému, do něhož celý vrh zakreslujeme. Pro velikosti těchto vektorů lze psát: $v_x = v_0 \cos\alpha$ a $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$.

Člen „*-gt*" je ve vztahu pro *y*-ovou složku rychlosti proto, že hmotný bod, který se pohybuje obecným vrhem, po vystřelení klesá ve směru osy *y* směrem dolů vlivem tíhové síly. Velikost rychlosti ve směru osy *y* tedy postupně klesá.

Pro souřadnice libovolného bodu, který leží na trajektorii vrhu, platí: $x = v_x t = v_0 t \cos\alpha$ a $y = h + v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = h + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$. Tím jsme získali závislost obou souřadnic *x* a *y* na čase.

Ve vztahu pro souřadnici *y* jsou oproti souřadnici *x* dva členy navíc: počáteční výška *h* nad vodorovnou rovinou a člen $-\frac{1}{2}gt^2$, který odpovídá dráze uražené hmotným bodem volným pádem. Znaménko mínus je zde proto, že volný pád tělesa způsobuje pokles *y*-ové souřadnice; hmotný bod je vlivem tíhové síly tažen směrem k zemi.

Jednou z charakteristik vrhu je **délka vrhu** *d*, tj. vzdálenost bodu *D* od paty kolmice vedené místem vrhu k vodorovné rovině. Uvědomíme-li si, že (podle obr. 76) bod *D* má ve zvolené kartézské soustavě souřadnice $D = [d; 0]$, je další vyšetřování charakteristik vrhu snadné. Bod *D* má *y*-ovou souřadnici nulovou, proto musí platit: $0 = h + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$.

Jedná se o vyjádření *y*-ové souřadnice pohybujícího se objektu, do níž jsme dosadili místo obecné výšky *y* nulu. Zajímá nás totiž bod *D*, který má *y*-ovou souřadnici nulovou.

Vzhledem k tomu, že parametry *h*, v_0 a α jsou dány zvoleným typem pohybu, zůstává ve vztahu jediná neznámá - a to je čas *t*. Protože uvedená rovnice vznikla na základě podmínky pro bod dopadu *D*, má čas *t* v rovnici význam **času dopadu** hmotného bodu na vodorovnou rovinu. Čas *t* nyní z rovnice vyjádříme.

Jedná se o kvadratickou rovnici, kterou si před dalším řešením upravíme vynásobením dvěma. Tak dostaneme: $0 = 2h + 2v_0 t \sin\alpha - gt^2$. Po seřazení členů v běžném pořadí máme kvadratickou rovnici ve tvaru $gt^2 - 2v_0 t \sin\alpha - 2h = 0$. Nyní podle vztahu pro kořeny kvadratické rovnice vyjádříme *t*: $t_{1,2} = \dfrac{2v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{4v_0^2 \sin^2\alpha + 8hg}}{2g}$. Po částečném odmocnění, vytknutí a zkrácení dostaneme: $t_{1,2} = \dfrac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2hg}}{g}$. Podle matematické teorie týkající se řešení kvadratických rovnic dostáváme dva kořeny, což je ale fyzikálně nepřípustné: hmotný bod nemůže dopadnout ve dvou různých časech! Podíváme-li blíže na čitatele uvedeného výrazu, zjistíme, že $v_0 \sin\alpha < \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2hg}$ a tudíž $v_0 \sin\alpha - \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2hg} < 0$. To by ovšem znamenalo, že čas vyjde záporný! A to je z fyzikálního hlediska nepřípustné. Proto fyzikální smysl má pouze jediný kořen a to kořen $t_d = \dfrac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2hg}}{g}$.

Nerovnost $v_0 \sin\alpha < \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2hg}$ platí proto, že pod odmocninou je stejný výraz jako na levé straně nerovnice umocněný na druhou a k němu je přičteno kladné číslo (*h* i *g* jsou čísla kladná). Proto je uvedená nerovnost skutečně pravdivá.

Nyní můžeme spočítat **délku vrhu** *d*. Vzhledem k tomu, že to je vzdálenost měřená ve směru osy *x*, stačí dosadit do vztahu $x = v_0 t \cos\alpha$. Po dosazení dostáváme: $d = v_0 t_d \cos\alpha = \dfrac{v_0^2 \sin\alpha . \cos\alpha + v_0 \cos\alpha \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2hg}}{g} = \dfrac{v_0^2 . 2 . \sin\alpha . \cos\alpha + \sqrt{v_0^4 . 4 . \sin^2\alpha . \cos^2\alpha + 8hgv_0^2 \cos^2\alpha}}{2g}$. S využitím vztahu $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ lze získaný vztah dále upravit tak, že dostaneme: $d = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha + \sqrt{v_0^4 \sin^2 2\alpha + 8hgv_0^2 \cos^2\alpha}}{2g}$.

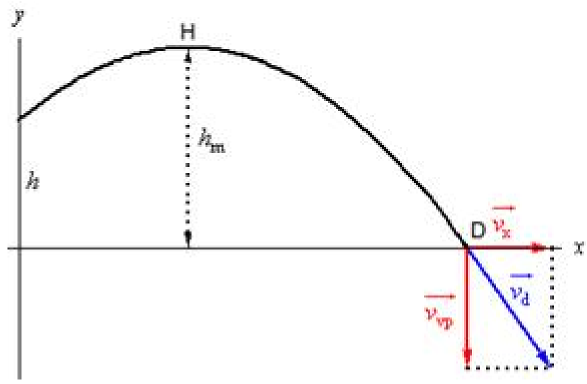
V bodě *H* dosahuje hmotný bod maximální výšky během svého letu. Do bodu *H* hmotný bod stoupá vzhůru, od bodu *H* klesá. To znamená, že v bodě *H* má nulovou rychlost ve směru osy y, tj. $v_y = 0$.

V bodě *H* se totiž těleso na chvilku zastaví: pohybuje se nahoru a zpomaluje vlivem tíhové síly a pak zrychluje směrem dolů. To znamená, že mezitím musí na moment zastavit …

Proto můžeme psát: $0 = v_0 \sin\alpha - gt_v$, odkud můžeme vyjádřit **čas výstupu** t_v do maximální výšky h_m: $t_v = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Máme-li čas výstupu do **maximální výšky** h_m, není problém určit tuto výšku h_m: stačí dosadit čas výstupu do obecného vyjádření *y*-ové souřadnice $y = h + v_0 t \sin\alpha - \dfrac{1}{2} gt^2$. Po dosazení dostaneme: $h_m = h + v_0 t_v \sin\alpha - \dfrac{1}{2} gt_v^2 = h + v_0 . \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} . \sin\alpha - \dfrac{1}{2} g . \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} = h + \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

Důležitou charakteristikou vrhu je i **velikost rychlosti dopadu** $\vec{v_d}$. Tato rychlost má dvě složky (viz obr. 77): rychlost $\vec{v_x}$, která je během celého pohybu konstantní, a rychlost volného pádu $\vec{v_{vp}}$. Volný pád je průmět pohybu hmotného bodu z bodu *H* do směru osy *y*. Z bodu *H* se hmotný bod pohybu po dobu $t_d - t_v$, než dopadne na vodorovnou rovinu.

Čas t_d trvá celý pohyb od startu po dopad do bodu D, po dobu t_v stoupá hmotný bod do bodu *H*. Zbývající čas pohybu (tj. čas $t_d - t_v$) padá těleso z bodu *H* na podložku.



Obr. 77

Pro velikost rychlosti $\vec{v_{vp}}$ lze tedy psát: $v_{vp} = g\left(t_d - t_v\right) = g\left(\frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2hg}}{g} - \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) = \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2hg}$. Pro velikost rychlosti $\vec{v_d}$ lze pak s využitím [Pythagorovy věty] psát: $v_d = \sqrt{v_x^2 + v_{vp}^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + v_0^2 \sin^2\alpha + 2hg} = \sqrt{v_0^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + 2hg} = \sqrt{v_0^2 + 2hg}$.

Z právě odvozených obecných charakteristik vrhu tělesa lze získat charakteristiky jednotlivých vrhů speciální volbou počáteční výšky *h* a úhlu α, který svírá vektor počáteční rychlosti $\vec{v_0}$ s kladnou částí osy *x*. Zvolíme nulovou velikost počáteční rychlosti, můžeme získat i charakteristiky volného pádu:

1. volný pád: $v_0 = 0$, $h \neq 0$ a $\alpha = -90°$

$$t_d = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2hg}}{g} = \frac{0.\sin(-90°) + \sqrt{0.\sin^2(-90°) + 2hg}}{g} = \frac{\sqrt{2hg}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha + \sqrt{v_0^4 \sin^2 2\alpha + 8hgv_0^2 \cos^2\alpha}}{2g} = \frac{0.\sin 2\alpha + \sqrt{0.\sin^2 2\alpha + 8hg.0.\cos^2\alpha}}{2g} = 0$$

$t_v = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{0.\sin(-90°)}{g} = 0$ - do maximální výšky hmotný bod nemusí stoupat, z této výšky je spuštěn

$$h_m = h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} = h + \frac{1}{2}\frac{0.\sin^2(-90°)}{g} = h$$

$$v_d = \sqrt{v_0^2 + 2hg} = \sqrt{0 + 2hg} = \sqrt{2hg}$$

2. vrh svislý vzhůru: $v_0 \neq 0$, $h = 0$ a $\alpha = 90°$

$$t_d = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2hg}}{g} = \frac{v_0 \sin 90° + \sqrt{v_0^2 \sin^2 90° + 2.0.g}}{g} = \frac{2v_0 \sin 90°}{g} = \frac{2v_0}{g}$$

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha + \sqrt{v_0^4 \sin^2 2\alpha + 8hgv_0^2 \cos^2\alpha}}{2g} = \frac{v_0^2 \sin 180° + \sqrt{v_0^4 \sin^2 180° + 8hgv_0^2 \cos^2 90°}}{2g} = 0$$

$$t_v = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0 \sin 90°}{g} = \frac{v_0}{g}$$

$$h_m = h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} = 0 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2 90°}{g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$v_d = \sqrt{v_0^2 + 2hg} = \sqrt{v_0^2 + 2.0\,g} = v_0$$

Při odmocňování výrazu $\sqrt{v_0^2 \sin^2 90°}$ resp. $\sqrt{v_0^2}$ je správným výsledkem výraz $\left|v_0 \sin 90°\right|$ resp. $\left|v_0\right|$ a ne výraz $v_0 \sin 90°$ resp. v_0. Z fyzikálního hlediska nemají záporné hodnoty uvedených výrazů smysl, proto je výsledek uveden ve tvaru bez absolutní hodnoty.

3. vrh svislý dolů: $v_0 \neq 0$, $h \neq 0$ a $\alpha = -90°$

$$t_d = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2hg}}{g} = \frac{v_0 \sin(-90°) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(-90°) + 2hg}}{g} = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2hg}}{g}$$

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha + \sqrt{v_0^4 \sin^2 2\alpha + 8hgv_0^2 \cos^2\alpha}}{2g} = \frac{v_0^2 \sin(-180°) + \sqrt{v_0^4 \sin^2(-180°) + 8hgv_0^2 \cos^2(-90°)}}{2g} = 0$$

$h_m = h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} = h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2(-90°)}{g} = h + \frac{v_0^2}{2g}$ - nemá fyzikální smysl, protože do maximální výšky hmotný bod nemůže vystoupit. Z maximální výšky je totiž vržen směrem dolů.

$t_v = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0 \sin(-90°)}{g} = -\frac{v_0}{g}$ - ani tento výsledek nemá fyzikální smysl. Hmotný bod je vržen směrem dolů, a proto nemůže dosáhnout v jiném než nulovém čase maximální výšku nad vodorovnou rovinou.

$$v_d = \sqrt{v_0^2 + 2hg}$$

4. vrh vodorovný: $v_0 \neq 0$, $h \neq 0$ a $\alpha = 0°$

$$t_d = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2hg}}{g} = \frac{v_0 \sin 0° + \sqrt{v_0^2 \sin^2 0° + 2hg}}{g} = \frac{\sqrt{2hg}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha + \sqrt{v_0^4 \sin^2 2\alpha + 8hgv_0^2 \cos^2\alpha}}{2g} = \frac{v_0^2 \sin 0° + \sqrt{v_0^4 \sin^2 0° + 8hgv_0^2 \cos^2 0°}}{2g} =$$

$$= \frac{\sqrt{8hgv_0^2}}{2g} = \frac{2v_0\sqrt{2hg}}{2g} = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} = v_0 t_d$$

$$t_v = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0 \sin 0°}{g} = 0$$

$$h_m = h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} = h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2 0°}{g} = h$$

$$v_d = \sqrt{v_0^2 + 2hg}$$

Správný výsledek při odmocňování výrazu $\sqrt{8hgv_0^2}$ je $2|v_0|\sqrt{2hg}$ nikoliv výraz $2v_0\sqrt{2hg}$, který je uveden výše. Vzhledem k tomu, že záporná hodnota uvedeného výrazu nemá fyzikální smysl, je uveden výsledek bez absolutní hodnoty.

5. vrh šikmý vzhůru: $v_0 \neq 0$, $h = 0$ a $\alpha \in (0°; 90°)$

$$t_d = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2hg}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2.0.g}}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha + \sqrt{v_0^4 \sin^2 2\alpha + 8hgv_0^2 \cos^2\alpha}}{2g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha + \sqrt{v_0^4 \sin^2 2\alpha + 8.0.gv_0^2 \cos^2\alpha}}{2g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$t_v = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$h_m = h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} = 0 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$$v_d = \sqrt{v_0^2 + 2hg} = \sqrt{v_0^2 + 2.0.g} = v_0$$

Pro výše uvedené odmocňování platí: $\sqrt{v_0^4 \sin^2 2\alpha} = v_0^2 \left|\sin 2\alpha\right|$ resp. $\sqrt{v_0^2} = \left|v_0\right|$. Vzhledem k tomu, že záporná hodnota uvedených výrazů nemá fyzikální smysl, jsou absolutní hodnoty vynechány.
