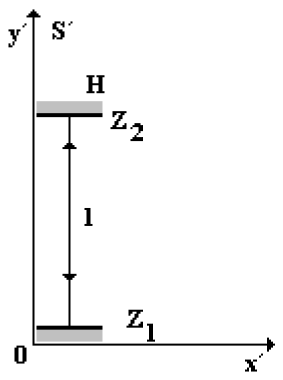
Světelné hodiny a odvození vztahu pro dilataci času

Dilatace času je jev, který se projevuje tím, že hodiny, které se pohybují vzhledem k určité vztažné soustavě *S*, jdou pomaleji než hodiny, které jsou v soustavě *S* v klidu.

Pro další úvahy je nutno zvolit „rozumný“ způsob měření času. Čas lze měřit libovolným periodickým dějem, který vhodným způsobem okalibrujeme. Jeden ze způsobů je použít tzv. **světelné hodiny**, s nimiž prováděl své myšlenkové experimenty sám Einstein. Světelné hodiny ve skutečnosti neexistují, jedná se pouze o myšlenkový experiment, který je jednoduchý, ale pro pochopení základních úvah o měření času postačující.

Důležitý je pouze fakt, že světelné hodiny teoreticky měří čas. O jejich konstrukci, použitý materiál, … se zajímat nebudeme.

Světelné hodiny se skládají ze dvou vzájemně rovnoběžných rovinných zrcadel Z_1 a Z_2 ve vzájemné vzdálenosti *l*. Od těchto zrcadel necháme periodicky odrážet světelný paprsek (viz obr. 13). Máme tedy definované hodiny a jeden jejich „tik“ bude čas, který paprsek potřebuje k překonání vzdálenosti $Z_1 Z_2 Z_1$. Tyto hodiny umístíme do soustavy S' a pro čas jednoho tiku, který budeme měřit v této soustavě, dostaneme: $\Delta t' = \frac{2l}{c}$.

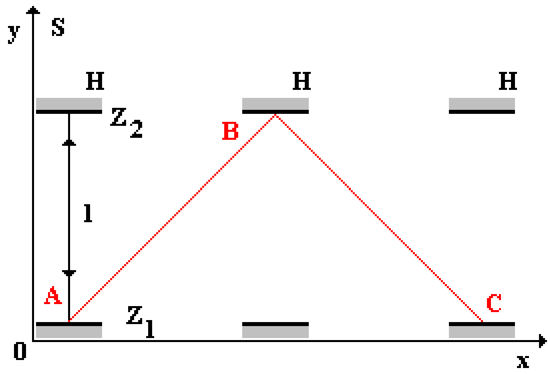


Obr. 13

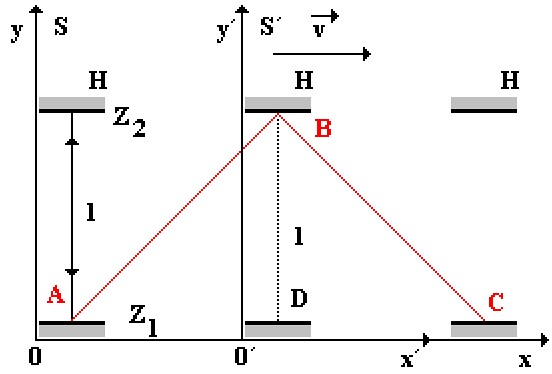
Nyní budeme předpokládat, že se inerciální soustava S' pohybuje vzhledem k inerciální soustavě *S* rychlostí $\vec{v}$, přičemž platí $v < c$. V soustavě S' jsou umístěny světelné hodiny *H* tak, že jejich osa je kolmá k vektoru rychlosti $\vec{v}$. V obou soustavách jsou pozorovatelé P' a *P*, kteří měří čas na hodinách.

Měření času spočívá v odečítání vzdálenosti od spodního zrcátka Z_1.

Pozorovatel v soustavě S' bude měřit „svůj“ čas pomocí jednoho tiku - časového intervalu $\Delta t'$. Pozorovatel v soustavě *S* bude měřit čas pomocí „svého“ tiku Δt. Vzhledem k pozorovateli v soustavě *S* se ale za tuto dobu hodiny posunou o vzdálenost $v \cdot \Delta t$. Světelný paprsek se v hodinách *H* vzhledem k pozorovateli P' (tj. vzhledem k soustavě S') pohybuje ve směru osy světelných hodin (tj. kolmo na obě zrcátka) rychlostí o velikosti *c*. Vzhledem k soustavě *S* se světelný signál pohybuje po lomené čáře *ABC* (viz obr. 14) také rychlostí o velikosti *c*. Velikost této rychlosti vyplývá z principu konstantní rychlosti světla. Čas, který světlo potřebuje na uražení dráhy *ABC*, je jeden tik pozorovatele *P*.



Obr. 14



Obr. 15

Vzhledem k tomu, že světelný paprsek má vzhledem k soustavě *S* urazit větší dráhu než vzhledem k soustavě S', musí být $\Delta t > \Delta t'$. Kvantitativní vztahy mezi oběma intervaly odvodíme nyní.

Z hlediska soustavy S' se dostane světelný paprsek za dobu $\frac{\Delta t'}{2}$ na horní zrcátko Z_2. Z hlediska soustavy *S* se světelný paprsek dostane za čas $\frac{\Delta t}{2}$ také na zrcátko Z_2, ale světlo při tom urazí jinou (delší) dráhu. Vzhledem k soustavě *S* se totiž zatím hodiny posunuly o dráhu $v.\Delta t$. Vztah mezi časovým intervalem Δt a $\Delta t'$ získáme na základě [Pythagorovy věty] v pravoúhlém trojúhelníku *ABD* na obr. 15. Platí: $|AB|^2 = |AD|^2 + |DB|^2$, což po dosazení je $\left(c\frac{\Delta t}{2}\right)^2 = \left(v\frac{\Delta t}{2}\right)^2 + l^2$. Odtud již snadno vyjádříme čas Δt: $\Delta t = \frac{2l}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Víme ale, že pro 1 tik měřený v soustavě S' platí $\Delta t' = \frac{2l}{c}$. Můžeme tedy dosadit a dostáváme $\Delta t = \Delta t'\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Vzhledem k tmou, že $v < c$, je i $\frac{v^2}{c^2} < 1$ a proto $0 < \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < 1$. Odtud již plyne, že $\Delta t > \Delta t'$. Jeden tik hodin v soustavě, vůči níž jsou hodiny v klidu (soustava S') trvá tedy kratší dobu než jeden tik hodin v soustavě, vůči níž se hodiny pohybují (soustava *S*). Tj. z hlediska soustavy *S* se pohybující hodiny zpožďují (jeden tik trvá totiž delší dobu).

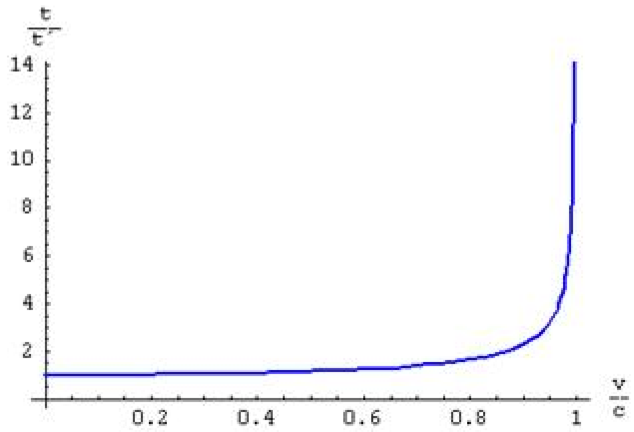
Analogický vztah platí i pro časy *t* a t': $t = t'\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Čas t', který na svých hodinách měří pozorovatel, jenž je vůči hodinám v klidu, se nazývá **vlastní čas**. V literatuře bývá někdy značen τ.

V některé literatuře se používá označení $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$; tento koeficient se nazývá **Lorentzův koeficient**. Důvod zavedení tohoto označení spočívá ve zjednodušení zápisu většiny vztahů používaných ve speciální teorii relativity resp. vztahů, které z této teorie vyplývají. S využitím tohoto označení bude mít pak vztah pro dilataci času tvar: $t = t'\gamma$.

Grafické znázornění [poměru] $\frac{t}{t'}$ na [velikosti rychlosti], kterou se hodiny vůči pozorovateli v klidu pohybují (resp. na poměru $\frac{v}{c}$), je zobrazen na obr. 16.

Pro malé velikosti rychlosti (tj. zhruba pro $\frac{v}{c} \in \langle 0; 0,2 \rangle$) nebude příliš velký rozdíl mezi časem, který měří pozorovatel, vůči němuž se hodiny pohybují, a vlastním časem. S rostoucí velikostí rychlostí se ale rozdíl mezi těmito časy začíná výrazně zvyšovat. Pro velikosti rychlostí blízké velikosti rychlosti světla ve vakuu roste čas měřený pozorovatelem, vůči němuž se hodiny pohybují, velmi prudce.



Obr. 16

Naprosto stejný závěr bychom dostali, kdybychom místo jedněch hodin vzali hodiny dvoje: hodiny *H* umístili do soustavy *S* a hodiny H' do soustavy S', přičemž soustava S' by se vzhledem k soustavě *S* pohybovala rychlostí $\vec{v}$.

Je možné tedy vyslovit závěr:

HODINY, KTERÉ SE VZHLEDEM K POZOROVATELI POHYBUJÍ, JDOU POMALEJI NEŽ HODINY, KTERÉ JSOU VZHLEDEM K POZOROVATELI V KLIDU.

Vztah pro dilataci času byl odvozen pro jeden výjimečně jednoduchý typ hodin. Platí ale pro libovolné hodiny jakékoliv jiné konstrukce a také pro všechny procesy, které jsou závislé na plynutí času (biologické, chemické, ...).

Populárně se vztah pro dilataci času někdy formuluje větou: „Pohybující hodiny jdou pomaleji než hodiny v klidu.“ Takto vyslovený závěr dilatace čase ale nemá smysl, neboť není udána soustava, vůči níž čas měříme.

K dilataci času dochází při každém pohybu libovolných dvou soustav vůči sobě. Tedy i v případě běžných pohybů, s nimiž se setkáváme (cesta autem na chalupu, cesta autobusem do školy, ...). V těchto případech je ale efekt způsobený dilatací času velmi malý. Běžné rychlosti, kterých jsme schopni dosáhnout, se pohybují v řádech jednotek až stovek metrů za sekundu ($100\ \mathrm{m.s^{-1}} = 360\ \mathrm{km.h^{-1}}$ - rychlost moderních vlaků, ...), v letadlech pak s rychlostmi tisíce metrů za sekundu. Maximálně tedy velikost rychlosti v řádu $10^3\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Velikost rychlosti světla ve vakuu je $c = 3.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$, tedy podíl $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ vystupující ve většině vztahů v teorii relativity je řádu $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{10^3}{3.10^8}\right)^2 = \left(\frac{10^{-5}}{3}\right)^2 = \frac{10^{-10}}{9} \doteq 10^{-11}$. Tato hodnota je velmi malá a vzhledem k číslu 1 ve výrazu $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ zcela zanedbatelná. Proto v běžném životě efekty teorie relativity nevnímáme.

Při vyšších rychlostech (řádově desítky procent rychlosti světla ve vakuu) efekty teorie relativity zanedbatelné nejsou - podíl $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ se bude více blížit jedné a nebude proto vzhledem k číslu 1 zanedbatelný. Tyto efekty se musí brát v úvahu např. při stavbě urychlovačů částic, při používání systému GPS, ...
