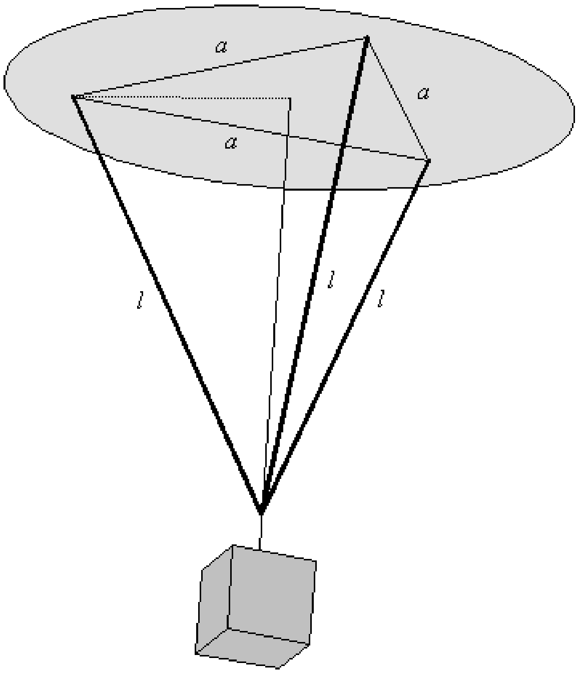
ÚLOHA: KVĚTINÁČ NA LANKÁCH

Zadání:

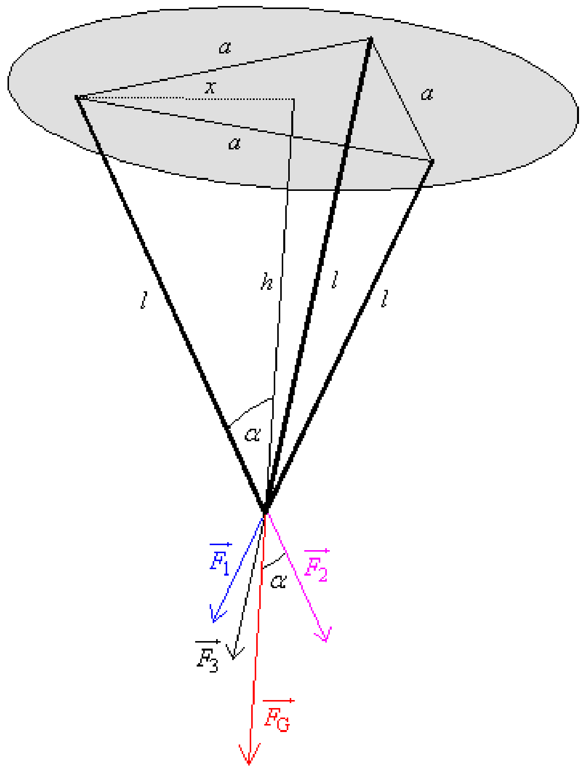
Do stropu jsou zaražené tři skoby tak, že tvoří rovnostranný trojúhelník o straně délky *a*. Na těchto skobách jsou zavěšená tři stejně dlouhá ocelová lanka o počáteční délce *l* a průměru *d*. Lanka jsou svými druhými konci spletena k sobě a je na ně zavěšen ozdobný květináč o hmotnosti *m*. Určete prodloužení lanek po zavěšení květináče. Modul pružnosti použité oceli je *E*. Uvažujete pružnou deformaci. Řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty $a = 50\ \mathrm{cm}$, $l = 1{,}2\ \mathrm{m}$, $d = 0{,}5\ \mathrm{mm}$, $m = 25\ \mathrm{kg}$ a $E = 220\ \mathrm{GPa}$.

Řešení:

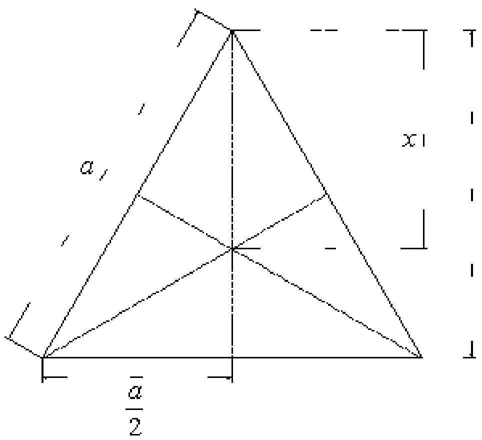
Popsaná situace je zobrazená na obr. 1. Po zavěšení tělesa jsou lanka deformována silami $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ a $\vec{F_3}$, které mají (vzhledem k symetrii úlohy) stejnou velikost (tj. $F_1 = F_2 = F_3$); liší se navzájem tedy pouze směrem. Přitom platí: $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{F_G}$, kde $\vec{F_G}$ je tíhová síla zavěšeného tělesa. Pro velikosti lze psát $F_G = 3F_1'$, kde F_1' je velikost průmětu sil $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ a $\vec{F_3}$ do svislého směru (tj. do směru tíhové síly $\vec{F_G}$). Podle obr. 2 platí: $\cos\alpha = \frac{F_1'}{F_1}$; úhel α přitom svírají nejen síly $\vec{F_1}$ a $\vec{F_1'}$, ale také každé z ocelových lanek se svislým směrem (tj. s výškou *h* pomyslného trojbokého jehlanu). Přitom $\cos\alpha = \frac{h}{l}$ a tedy $\frac{F_1'}{F_1} = \frac{h}{l}$, odkud lze psát $F_1' = \frac{h}{l} F_1$.



obr. 1



obr. 2



obr. 3

Pro výšku *h* jehlanu platí $h = \sqrt{l^2 + x^2}$, kde *x* je spojnice vrcholu trojúhelníka, který tvoří skoby ve stropě, a průsečíku výšek tohoto trojúhelníka. Vzhledem k tomu, že trojúhelník je rovnostranný, jsou výšky zároveň i těžnicemi (půlí stranu proti vrcholu, z něhož jsou spuštěny). Proto $x=\frac{2}{3}v$, kde v je výška v trojúhelníku tvořeném skobami na stropě. Podle obr. 3 lze psát: $v=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$ a tedy $x=\frac{2}{3}v=\frac{2}{3}.\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{a}{3}\sqrt{3}$. Nyní je možné určit h: $h=\sqrt{l^2+x^2}=\sqrt{l^2+\frac{3a^2}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{3l^2+a^2}$.

Nyní už můžeme postupně dosadit do vztahu pro velikost tíhové síly zavěšeného tělesa: $F_G=3F_1'=3F_1\frac{h}{l}=F_1\frac{\sqrt{3}}{l}\sqrt{3l^2+a^2}$. Vzhledem k tomu, že $F_G=mg$, lze ze vztahu $mg=F_1\frac{\sqrt{3}}{l}\sqrt{3l^2+a^2}$ vyjádřit velikost síly F_1: $F_1=\frac{mgl}{\sqrt{9l^2+3a^2}}$. Silou o velikosti F_1 je deformováno tahem každé ze tří uvažovaných ocelových lanek.

Pro oblast pružné deformace platí Hookeův zákon: $\sigma=E\varepsilon$. Po dosazení z definičních vztahů dostaneme $\frac{F_1}{S}=E\frac{\Delta l}{l}$. Dále lze psát: $\frac{\frac{mgl}{\sqrt{9l^2+3a^2}}}{\pi\frac{d^2}{4}}=E\frac{\Delta l}{l}$ a po úpravě $\frac{4mgl}{\pi d^2\sqrt{9l^2+3a^2}}=E\frac{\Delta l}{l}$. Odtud je možné již vyjádřit prodloužení lanka Δl: $\Delta l=\frac{4mgl^2}{\pi d^2 E\sqrt{9l^2+3a^2}}$.

Po dosazení: $\Delta l=\frac{4mgl^2}{\pi d^2 E\sqrt{9l^2+3a^2}}=\frac{4.25.9,81.1,2^2}{3,14.0,0005^2.220.10^9.\sqrt{9.1,2^2+3.0,5^2}}\ \mathrm{m}=0,0022\ \mathrm{m}=2,2\ \mathrm{mm}$.

Každé ze tří lanek se po zavěšení květináče prodlouží o $2,2\ \mathrm{mm}$.